

Entwicklung eines Berechnungsmodells zur Untersuchung der Strömungsvorgänge an Überfallschütz und drehendem Schaufelwasserrad

Hans-Henning Hermerschmidt

**Institut für Statik
Technische Universität Braunschweig**

Bericht Nr. 2019-124



Entwicklung eines Berechnungsmodells zur Untersuchung der Strömungsvorgänge an Überfallschütz und drehendem Schaufelwasserrad

Von der
Fakultät Architektur, Bauingenieurwesen und Umweltwissenschaften
der Technischen Universität Carolo-Wilhelmina
zu Braunschweig

zur Erlangung des Grades eines
Doktor-Ingenieurs (Dr.-Ing.)
genehmigte

Dissertation

von
Dipl.-Ing. M.Sc.
Hans-Henning Hermerschmidt,
geb. Schippke

geboren am 07. Juli 1983
in Hannover

Eingereicht am: 09. Januar 2019
Disputation am: 28. Juni 2019

Berichterstatter: Prof. Dr.-Ing. Dieter Dinkler
Prof. Dr. rer. nat. Thomas Sonar
Prüfer: Prof. Dr.-Ing. Jochen Aberle

2019

Von der Fakultät Architektur, Bauingenieurwesen und Umweltwissenschaften
der Technischen Universität Carolo-Wilhelmina zu Braunschweig

zur Erlangung des Grades
eines Doktor-Ingenieurs (Dr.-Ing.)

genehmigte Dissertation

Eingereicht am: 09. Januar 2019

Disputation am: 28. Juni 2019

Berichterstatter: Prof. Dr.-Ing. Dieter Dinkler
Prof. Dr. rer. nat. Thomas Sonar

Prüfer: Prof. Dr.-Ing. Jochen Aberle

ISBN 978-3-926031-25-9

Herausgeber: Prof. Dr.-Ing. Dieter Dinkler

©Institut für Statik, Technische Universität Braunschweig, 2019

Kurzfassung

2-Phasen-Strömungen spielen im Wasserbau sowohl bei der Überströmung von Verschlussorganen als auch bei der Durchströmung von Schaufelwasserrädern eine wesentliche Rolle für die Belastungsermittlung und die konstruktive Durchbildung. Ziel dieser Arbeit ist es, mittels numerischer Berechnungen einen Einblick in das Strömungsgeschehen am Schütz und im Wasserrad zu erlangen.

Die Beschreibung der am Strömungsgeschehen beteiligten Fluidphasen erfolgt anhand der inkompressiblen NAVIER-STOKES-Gleichungen in den primären Variablen Geschwindigkeit und Druck. Unter Hinzunahme einer *Level-Set*-Funktion in Verbindung mit einer regularisierten HEAVISIDE-Funktion können sowohl Lage und Bewegung der Grenzfläche als auch ein stetiger Übergang zwischen den Materialparametersätzen abgebildet werden. Zur Diskretisierung des Fluidgebietes kommt die Raum-Zeit-Finite-Elemente-Methode zur Anwendung. Damit wird die Veränderlichkeit des Strömungsgebietes implizit bei der Abbildung auf das Referenzgebiet erfasst, so dass die Modellgleichungen in EULERScher Betrachtungsweise verbleiben können. Die Berücksichtigung der stetigen Drehbewegung des Wasserrades erfolgt mit Hilfe der *Shear-Slip-Mesh-Update*-Methode als diskontinuierlichem Netzbewegungsverfahren.

Im Rahmen der numerischen Untersuchung der Strömungsvorgänge am vom Modellwasserrad losgelösten Regulierschütz mit Kreisbogengeometrie können fünf voneinander unterscheidbare Strömungszustände identifiziert werden. Für diese erfolgt eine Analyse der Wechselwirkungsvorgänge beider Fluidphasen im Bereich des Schützrückens und im angrenzenden Tosbecken. Neben der Ausbildung von Abreiß- und Überfallwirbel als den zwei charakteristischen Wirbelstrukturen kann auch der Lufttransport zum Schützblech bei speziellen Strömungszuständen beobachtet werden.

Für das Modellwasserrad erfolgt die numerische Untersuchung des Befüllungs- und Entleerungsvorganges. Neben dem Strömungsgeschehen in der Wasserphase wird dabei auch der Einfluss der Luftphase insbesondere bei der Be- und Entlüftung der Schaufelräume berücksichtigt. Sowohl im Ein- und Austrittsbereich als auch in den Schaufelräumen und im kropfnahen Spaltbereich können die wirkungsgradrelevanten Verlusteinflüsse im Strömungsfeld in Form von Wirbelbildungen und Strömungsumlenkungen kenntlich gemacht werden. In der Gegenüberstellung der Druckverläufe entlang des Kropfes mit denjenigen am Überfallschütz zeigt sich der Einfluss der sich dicht am Kropf entlangbewegenden Wasserradschaufeln.

Sowohl für die Schützüberströmung als auch für die Durchströmungsvorgänge am Wasserrad wurden begleitende experimentelle Untersuchungen zur Validierung durchgeführt. Diese geben auch einen über die numerisch auflösbaren Skalen hinausgehenden Einblick in das Interaktionsverhalten der Fluidphasen.

Die mit Hilfe des entwickelten Finite-Elemente-Programmes durchgeführten numerischen Untersuchungen haben sowohl am Schütz als auch beim Wasserrad die Beobachtung und Analyse von charakteristischen Strömungsphänomenen ermöglicht, für die bisher keine oder nicht in dem Umfang entsprechende Daten vorhanden waren. Neben der Möglichkeit zum vertiefenden Verständnis der auftretenden Strömungsphänomene bieten die gewonnenen Ergebnisse auch einen Ansatzpunkt zur Entwicklung verlustminimierender Strömungsgeometrien.

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	1
1.1	Motivation	1
1.2	Aufbau der Arbeit	3
2	Fluidmechanik	7
2.1	Fluid- und Strömungseigenschaften	8
2.1.1	Fluideigenschaften	8
2.1.2	Strömungsvorgänge	9
2.1.3	Mehr-Phasen-Strömungen	12
2.2	Kontinuumsmechanische Grundlagen	14
2.2.1	Einführung	14
2.2.2	Betrachtungsweisen	15
2.2.3	REYNOLDSSches Transporttheorem	18
2.3	Navier-Stokes Gleichungen	22
2.3.1	Bilanzgleichungen	22
2.3.2	Primäre Variablenformulierung	24
3	Raum-Zeit-Diskretisierung	35
3.1	Grundlagen	36
3.1.1	Raum-Zeit-Finite-Elemente-Methode	36
3.1.2	Finite-Elemente-Methode bei Strömungsberechnungen	41
3.2	Inkompressible Navier-Stokes-Gleichungen	48
3.2.1	Schwache Formulierung	48
3.2.2	Matrizelle Darstellung	54
3.2.3	Nischenströmung	57
3.3	2-Phasen-Strömungen	63
3.3.1	Beschreibungsmöglichkeiten.	63
3.3.2	Level-Set-Methode	66
3.3.3	Sohlschwelle	75
3.4	Netzbewegung	78
3.4.1	Gebräuchliche Verfahren	78
3.4.2	SSMUM	81
3.4.3	ST-SSMUM	84
3.4.4	Rotierender Starrkörper	87

4	Überfallschütz	95
4.1	Theoretische Grundlagen	96
4.1.1	Gerinneströmungen	96
4.1.2	Überfallbauwerke	98
4.2	Experimentelle Untersuchungen	107
4.2.1	Notwendigkeit	107
4.2.2	Experimentalmodell	108
4.2.3	Versuchsergebnisse	111
4.3	Numerische Untersuchungen	124
4.3.1	Vorbemerkungen	124
4.3.2	Berechnungsbeispiel	124
4.3.3	Strömungsanalyse	128
4.3.4	Weitere Fließzustände	138
4.3.5	Zusammenfassung	142
5	Schaufelwasserrad	145
5.1	Wasserradtechnologie	147
5.1.1	Technische Entwicklung	147
5.1.2	Hochleistungswasserräder	152
5.1.3	Wirkungsgradeinflüsse	156
5.2	Experimentelle Untersuchungen	163
5.2.1	Untersuchungsziele	163
5.2.2	Experimentalmodell	164
5.2.3	Versuchsergebnisse	166
5.3	Numerische Untersuchungen	174
5.3.1	Vorbemerkungen	174
5.3.2	Berechnungsbeispiel	175
5.3.3	Betriebszustand	180
5.3.4	Außergewöhnliche Zustände	193
5.3.5	Zusammenfassung	196
6	Zusammenfassung und Ausblick	199
6.1	Zusammenfassung	199
6.2	Ausblick	202
A	Anhang	A-1
A.1	Programmtechnische Entwicklungen	A-1
A.2	Finite-Elemente-Methode	A-6
A.3	Turbinentechnologie	A-9
B	Literatur	B-1

Hinweise zur Nomenklatur und zur Notation

Alle Symbolbezeichnungen werden an der Stelle ihres ersten Auftretens benannt und innerhalb der Arbeit kapitelübergreifend konsistent weiterverwendet.

Skalarwertige Größen sind mit lateinischen oder griechischen Kleinbuchstaben bezeichnet. Für Vektoren und Matrizen werden fette Klein- bzw. Großbuchstaben verwendet. Bei vierstufigen Tensoren kommen kalligraphische Buchstaben zur Anwendung.

Dezimalzahlen sind mit Punkt notiert.

1 Einleitung

1.1 Motivation

Die Kenntnis des Strömungsfeldes ist von wesentlicher Bedeutung für die Belastungsermittlung und die konstruktive Durchbildung wasserbaulicher Konstruktionen. Dies gilt sowohl bei der Überströmung von Verschlussorganen wie Wehren und Schützen als auch bei der Durchströmung von Schaufelwasserrädern, die im Zuge der Energiewende eine Renaissance als grundlastfähige Wasserkraftmaschinen erfahren. Sowohl am Schütz als auch im Wasserrad liegt infolge der Interaktion von Wasser und Luft eine 2-Phasen-Strömung mit einem komplexen physikalischen Verhalten vor, das zusätzlich zu den innerhalb einer Fluidphase vorhandenen räumlichen und zeitlichen Skalen auch von der über die Grenzfläche stattfindenden Fluid-Fluid-Interaktion geprägt ist. Dabei unterscheiden sich die Strömungscharakteristiken der beiden Fluidphasen zum Teil erheblich voneinander.

Im Zuge des Ausbaus der erneuerbaren Energien gewinnt die Wasserkraft an Bedeutung, da sie gegenüber Wind- oder Solarenergie deutlich kontinuierlicher zur Verfügung steht und somit planbar und grundlastfähig ist. Insbesondere im Bereich der Laufwasserkraft existiert bei Flachlandflüssen im Bereich der niederen Fallhöhen zwischen 0.4 m – 4 m ein bisher nicht genutztes Potential, das zu einem großen Teil an den vorhandenen Staustufen vorliegt. Dieses Potential ist jedoch aufgrund der bei Flüssen im Jahresverlauf stark schwankenden Durchflussmengen und der mit der niedrigen Fallhöhe einhergehenden nur geringen hydraulischen Pressung von der heutigen Turbinentechnologie weder technisch noch wirtschaftlich nutzbar.

Demgegenüber haben Untersuchungen der Arbeitsgruppe Regenerative Energien am Institut für Statik der TU Braunschweig gezeigt, dass mit Hilfe der Wasserradtechnologie eine Nutzung der Laufwasserkraft im Bereich der niederen Fallhöhen technisch und wirtschaftlich möglich wäre [Sei16]. Von der Arbeitsgruppe wurden im Rahmen der Weiterentwickelten Wasserradtechnologie sogenannte Hochleistungswasserräder als Schaufelwasserräder nach verbesserter ZUPPINGER Bauart entwickelt, die bei Verwendung heutiger Materialien, moderner Konstruktionsverfahren und einer neuen Kraftabnahmetechnologie in der Lage wären, Durchflussmengen von bis $100 \text{ m}^3/\text{s}$ zu verarbeiten und dabei eine Leistung von bis zu 3 MW zu erzeugen [Sei07]. Gegenwärtig erfolgt als Realisierung im Großmaßstab am Allerwehr bei Bannetze/Hornbostel der Bau einer Forschungswasserkraftanlage, bei der ein Schwerlastwasserrad mit einem Durchmesser von 11 m (SWR-11) und einer Breite von 12 m zum Einsatz kommt. Dieses soll in der Lage sein, bei einer Umdrehungszahl von unter 4 U/min bis zu $60 \text{ m}^3/\text{s}$ zu verarbeiten und mit einer Leistung von 500 kW eine Jahresstromproduktion von $2.5 \times 10^6 \text{ kWh}$ zu erzielen. Charakteristisch für die entwickelten Hochleistungswasserräder ist ihr sich fast über den gesamten Betriebsbereich ausdehnender plateauartiger Wirkungsgradverlauf mit turbinenäquivalenten

Werten von 85 % – 92 %. Dieser wird ergänzt von einem stark variablen Arbeitsbereich mit Durchflussmengen zwischen 10 % – 150 % und Fallhöhen zwischen 25 % – 180 % in Bezug auf den Bemessungszustand.

Begleitend zur theoretischen Entwicklung der Hochleistungswasserräder auf Basis der historischen Literatur unter Verwendung von geometrisch-analytischen Methoden ist ein Modell des SWR-8 im Maßstab 1:10 als Prototyp konstruiert worden. Die damit durchgeführten experimentellen Untersuchungen konnten die erwarteten theoretischen Wirkungsgrade belegen sowie erste Einblicke in das Strömungsgeschehen geben [Sei15]. Besonderen Einfluss auf den Wirkungsgrad hatte neben der Dicke des Kropfspaltes das Strömungsverhalten im Eintrittsbereich, das im Wesentlichen von der Abstimmung der Schaufelform mit der Geometrie des den eintretenden Wasserstrahl regulierenden Schützes abhängt. Jedoch war es nicht möglich, über rein visuelle Beobachtungen hinausgehende Aussagen zu den komplexen Strömungsvorgängen sowie insbesondere zum Geschwindigkeits-, Wirbel- oder Druckfeld zu machen. Aufgrund der sehr kompakten Geometrie des Wasserradmodells und der stetigen Drehbewegung waren bisher abgesehen von der Ermittlung des Drehmomentes als integraler Größe weder quantitative Messungen im Ein- und Austrittsbereich noch auf der Schaufel oder im Schaufelraumbereich sowie entlang des Kropfes möglich.

Neben Theorie und Experiment stellt infolge der in den letzten Jahrzehnten entwickelten Diskretisierungsverfahren und den kontinuierlich stattfindenden Verbesserungen in der Computertechnik nun auch die numerische Strömungsberechnung eine Möglichkeit zur Informationsgewinnung dar. Ziel dieser Arbeit ist es daher, mittels numerischer Berechnungen einen ergänzenden und vertiefenden Einblick in das Strömungsgeschehen im Wasserrad zu erlangen, so dass die maßgebenden Effekte auf die das Strömungsgeschehen begrenzende Struktur charakterisiert werden können.

Zusätzlich haben die bisherigen Beobachtungen der Durchströmungsvorgänge am Schaufelwasserrad die Frage nach dem Einfluss des Regulierschützes auf das Eintrittsverhalten des Wasserstrahls in die Schaufelräume und die im Eintrittsbereich vorliegenden Strömungsphänomene aufgeworfen. Daher findet im Rahmen dieser Arbeit ergänzend zur Betrachtung der Durchströmungsvorgänge am Schaufelwasserrad auch eine Untersuchung des vom Wasserrad losgelösten Regulierschützes statt. Neben der Beobachtung und Diskussion der Überströmungsvorgänge an der alleinstehenden Schützkonstruktion bietet die Gegenüberstellung mit den Strömungsvorgängen am Wasserrad die Möglichkeit, dessen Einfluss kenntlich zu machen.

Überfallschütze dienen als verbreitete Form von Verschlussorganen zur Wasserstandshaltung und Abflussregulierung in offenen Gerinnen. Sie üben ihre Regulierungsfunktion über das gezielte Herbeiführen des kritischen Fließzustandes im Kontrollquerschnitt aus, so dass der maximale Abfluss für das vorhandene Energieniveau erzielt wird. Über dem Schütz findet dabei ein stetiger Übergang von einem strömenden in einen schießenden Abflusszustand statt, während sich im nachgeschalteten Tosbecken der umgekehrte Wechsel des Fließzustandes von einem schießenden in einen strömenden Zustand lokal stark begrenzt vollzieht. Dabei kommt es im Rahmen der Ausbildung einer Wirbelwalze zu einer starken Vermischung von Wasser und Luft und es findet ein plötzlicher Anstieg der Wassertiefe statt, der als Wechselsprung bezeichnet wird. Im regulären Zustand liegt der Überfallstrahl am Schützrücken an, jedoch ist es möglich, dass Luft den Strahl durchbrechen kann und es so zu einer Ablösung vom Schütz-

rücken kommt. Der Überfallstrahl liegt dann auf einem Luftpolster auf und schottet dieses von der Umgebung ab. Überfallstrahl, Luftpolster und Schütz können als gekoppeltes System miteinander interagieren und es kann zum Phänomen der sogenannten Wehrschwingung kommen, bei dem der Überfallstrahl in Schwingung gerät und über das Luftpolster das Schütz zur Vibration anregt. Über die Schützkrone tritt dann eine Rückkopplung zum Überfallstrahl auf, so dass der Schwingungsvorgang von Strahl und Schütz sich gegenseitig aufrecht erhält.

Sowohl für den regulären Abflusszustand, bei dem der Strahl anliegt, als auch für den außergewöhnlichen Zustand der Wehrschwingung existieren nur vereinfachende theoretische Beschreibungen. Unter der Annahme des eindimensionalen Modells einer Stromröhre folgt für den regulären Abflusszustand die Angabe der Abflussformel nach POLENI, die mit Hilfe des Überfallbeiwertes C_Q den gesamten Strömungsvorgang am Schütz integral beschreibt. Eine lokale Beschreibung der Strömungswirkung auf das Schütz und insbesondere entlang des Schützrückens ist ohne zusätzliche experimentelle Untersuchungen für die betrachtete spezielle Geometrie nicht möglich. Ebenso kann der dem Schütz nachfolgende Wechselsprung im Tosbecken nur integral anhand der Sprunghöhe erfasst werden, ohne die tatsächliche Komplexität der Vermischungsvorgänge von Wasser- und Luftphase im Detail zu berücksichtigen.

Damit gilt für die Schützüberströmung wie auch bereits bei der Wasserraddurchströmung, dass eine vereinfachende analytische Beschreibung zur lokalen Angabe von Zustandsgrößen und der Wirkung auf die das Strömungsfeld begrenzende Struktur nicht möglich ist. In beiden Fällen sind experimentelle Untersuchungen fester Bestandteil des Entwurfs- und Bemessungsvorganges. Jedoch besteht dabei ein nicht zu unterschätzender Aufwand bei der systematischen Untersuchung von Parametereinflüssen sowie der störungsfreien Messung von Geschwindigkeits- und Druckfeld. Dies gilt besonders beim Wasserrad für den Ein- und Austrittsbereich sowie die Schaufelräume infolge der stetigen Drehbewegung. Daher ist es Ziel dieser Arbeit unter Zuhilfenahme numerischer Untersuchungen einen detaillierten Einblick in die Strömungsvorgänge am Schütz und im Wasserrad zu gewinnen.

1.2 Aufbau der Arbeit

Für die Entwicklung des Berechnungsmodells zur Beschreibung von 2-Phasen-Strömungen auf veränderlichen Gebieten erfolgt in den Kapiteln 2 und 3 die Zusammenstellung der theoretischen Grundlagen auf Basis der fluidmechanischen Beschreibung. In Anhang A.1 ist die Beschreibung der zugehörigen programmtechnischen Umsetzung dargestellt. Das Berechnungsmodell wird in den Kapiteln 4 und 5 zur Untersuchung der Strömungsvorgänge am Überfallschütz und beim Schaufelwasserrad angewendet. Dabei werden die numerischen Untersuchungen jeweils von einem experimentellen Begleitprogramm zur Validierung ergänzt, das auch über die numerische Auflösung hinausgehende Einblicke in das Strömungsgeschehen liefert.

In Kapitel 2 sind die kontinuums- und fluidmechanischen Grundlagen zur Beschreibung von Strömungen auf veränderlichen Gebieten zusammengestellt. Ausgehend von den in Abschnitt 2.1 diskutierten Fluid- und Strömungseigenschaften sowie den Beschreibungsmöglichkeiten von Mehr-Phasen-Strömungen wird in Abschnitt 2.2 die ALE-Betrachtungsweise zur Beschreibung von Strömungen auf veränderlichen Gebieten eingeführt und die zugehörige Form des REYNOLDSSchen Transporttheorems hergeleitet. Auf dessen Grundlage können dann in Ab-

schnitt 2.3 die Bilanzgleichungen für Masse und Impuls entwickelt werden, die ergänzt um die kinematische Beschreibung und das STOKESSche Materialgesetz als konstitutiver Beziehung die inkompressiblen NAVIER-STOKES-Gleichungen in den primären Variablen Geschwindigkeit und Druck ergeben.

In Kapitel 3 erfolgt die Diskretisierung der das Strömungsgeschehen beschreibenden Modellgleichungen. Nach Einführung und Diskussion der Grundlagen der Finite-Elemente-Methode sowie speziell der einheitlichen Behandlung von Raum- und Zeitbereich im Rahmen der Raum-Zeit-Finite-Elemente-Methode in Abschnitt 3.1 findet in Abschnitt 3.2 die Überführung der inkompressiblen NAVIER-STOKES-Gleichungen in ihre schwache Form mit nachfolgender Diskretisierung statt. Diese wird ergänzt von den notwendigen Stabilisierungstermen für das Geschwindigkeits- und Druckfeld sowie von der in Abschnitt 3.3 eingeführten *Level-Set*-Funktion zur impliziten Beschreibung von Lage und Bewegung der Grenzfläche, so dass auch 2-Phasen-Strömungen abgebildet werden können. Abgeschlossen wird die Diskretisierung in Abschnitt 3.4 mit der Hinzunahme der *Shear-Slip-Mesh-Update*-Methode als diskontinuierliches Netzbewegungsverfahren zur Berücksichtigung der stetigen Drehbewegung des Wasserrades. Anhand von numerischen Testbeispielen zur Nischenströmung, der Überströmung einer Sohlschwelle sowie eines in einem Zwei-Phasen-Gemisch rotierenden Starrkörpers findet die Verifikation des Berechnungsmodell statt.

In Kapitel 4 kommt das entwickelte Berechnungsmodell zur Untersuchung der Phänomene der 2-Phasen-Strömung am Überfallschütz zur Anwendung. Nach Einführung in die Strömungsvorgänge am Überfallschütz und die Theorie zu ihrer Beschreibung in Abschnitt 4.1 wird in Abschnitt 4.2 der Versuchsaufbau des experimentellen Begleitprogramms mit den gemachten Beobachtungen vorgestellt. Darauf folgt in Abschnitt 4.3 die numerische Untersuchung der Überfallströmung am Regulierschütz. Neben der eingehenden Betrachtung der Strömungsvorgänge für die Schützstellung mit einer Höhe von 30 cm unter Berücksichtigung unterschiedlicher Anströmbedingungen wird auch die Schützstellung mit einer Höhe von 50 cm untersucht.

Auf die Betrachtung der reinen Schützüberströmung schließt sich in Kapitel 5 die Untersuchung der Strömungsvorgänge am Schaufelwasserrad an. Neben den in Abschnitt 5.1 zusammengestellten Grundlagen der Wasserradtechnologie und der darauf aufbauenden Entwicklung der Hochleistungswasserräder sind in Abschnitt 5.2 die zur Validierung mit Hilfe des Maßstabsmodells des SWR-8 durchgeführten begleitenden experimentellen Untersuchungen zusammengestellt. Diese werden in Abschnitt 5.3 um die numerischen Untersuchungsergebnisse für das Wasserradmodell mit einer ausführlichen Analyse des Strömungsfeldes ergänzt. Der Feldcharakter der Berechnungsergebnisse lässt eine detaillierte Betrachtung von Geschwindigkeits- und Druckfeld im Ein- und Austrittsbereich sowie in den Schaufelräumen und auf den Schaufeln zu. Die Gegenüberstellung der Druckverläufe entlang des Kropfes mit denjenigen am Schütz ermöglicht die Charakterisierung des Einflusses des Wasserrades auf das Strömungsgeschehen.

Abschließend sind in Kapitel 6 die im Rahmen dieser Arbeit gewonnenen Ergebnisse zusammengefasst. Diese werden ergänzt von Anregungen zu weiterführenden Untersuchungen und Verbesserungsvorschlägen für das im Rahmen dieser Arbeit entwickelte Berechnungsmodell.

2 Fluidmechanik

Als Grundlage für die in Kapitel 4 und 5 untersuchten Strömungsvorgänge am Überfallschütz und im Schaufelwasserrad sind in diesem Kapitel die kontinuums- und fluidmechanischen Grundlagen zusammengestellt.

In Abschnitt 2.1 werden ausgehend von der physikalischen Fluidbeschreibung und der mechanischen Abgrenzung von Fluiden zu Festkörpern die Dichte und die Viskosität als die für diese Arbeit wesentlichen Fluideigenschaften besprochen. Daran schließt sich die Unterscheidung in einen laminaren und turbulenten Strömungszustand sowie zusätzlich bei Freispiegelströmungen die Kennzeichnung des Fließzustandes in einen unter- und einen überkritischen Bereich an. Im Hinblick auf die im Rahmen dieser Arbeit stattfindende Behandlung von Freispiegelströmungen als Zwei-Phasen-Strömungen erfolgt am Ende des Abschnittes eine Übersicht der gängigen theoretischen Beschreibungsmöglichkeiten von Mehr-Phasen-Strömungen.

Ausgangspunkt der kontinuumsmechanischen Beschreibung mechanischer Vorgänge ist in Abschnitt 2.2 neben dem Körperbegriff als Menge materieller Punkte die Einführung des Beobachters als Betrachter der mechanischen Vorgänge. Für diesen wird zusätzlich zu der LAGRANGEschen und EULERSchen Betrachtungsweise die *Arbitrary-Lagrangian-Eulerian*-Betrachtungsweise (ALE-Betrachtungsweise) eingeführt, die es dem Beobachter ermöglicht sich beliebig im Raum zu bewegen und so auch die Strömung auf in der Zeit veränderlichen Gebieten zu erfassen. Darauf aufbauend erfolgt die Entwicklung des REYNOLDSSchen Transporttheorems in ALE-Betrachtungsweise.

Dieses wird dann in Abschnitt 2.3 zur Bereitstellung der Masseerhaltung und Impulsbilanz in ALE- und EULERScher Betrachtungsweise herangezogen. Die Bilanzgleichungen werden ergänzt sowohl von der Entwicklung der kinematischen Beziehungen anhand der Betrachtung des Deformations- und Verzerrungsverhaltens im Fluidkörper als auch anhand der Herleitung der konstitutiven Beziehung NEWTONscher Fluide. Aus der Zusammenführung der Grundgleichungen ergeben sich dann die inkompressiblen NAVIER-STOKES-Gleichungen in den primären Variablen Geschwindigkeit und Druck. Die Diskussion ihrer mathematischen Eigenschaften sowie der notwendigen Rand- und Anfangsbedingungen beschließt das Kapitel.

2.1 Fluid- und Strömungseigenschaften

2.1.1 Fluideigenschaften

Fluidbeschreibung. Als Fluide werden sowohl tropfbare Flüssigkeiten als auch Gase bezeichnet. Während Flüssigkeiten in der Regel den ihnen zur Verfügung stehenden Raum nicht vollständig ausfüllen und dabei freie Oberflächen ausbilden, dehnen Gase sich stets vollständig auf das zur Verfügung stehenden Volumen aus. Sowohl für Flüssigkeiten als auch für Gase ist eine kontinuumsmechanische Beschreibung anwendbar, wenn die freie Weglänge ihrer Moleküle ausreichend klein gegenüber der betrachteten Körperabmessung und damit ihre Masseverteilung stetig ist. Die sich daraus ergebenden physikalischen Fluideigenschaften sind dann stetige Funktionen von Raum und Zeit [Tru08, Spu07, Dur06]. Wesentliches Merkmal von Fluiden, insbesondere gegenüber Festkörpern, ist ihr bei Kraftaufbringung nicht endliches Deformationsverhalten, das bei anhaltender Belastung zu einer fortgesetzten Bewegung der Fluidpartikel und damit zu einer vollständigen Gestaltänderung führt. Dabei hängt die Spannung bei Fluiden von der Verzerrungsgeschwindigkeit und nicht wie bei Festkörpern von der Verzerrung selbst ab. Aufgrund des unter Belastung nicht endlichen Deformationsvorganges findet in der Fluidmechanik vorwiegend eine ortsfeste Beobachtung der Zustandsänderung der physikalischen Fluideigenschaften Anwendung, während eine partikelbasierte Betrachtung nur in Ausnahmefällen verwendet wird. Im Hinblick auf das mechanische Verhalten von Fluiden sind als physikalische Eigenschaften sowohl die Dichte ρ als auch die Viskosität μ von herausgehobener Bedeutung.

Viskosität. Eine unterschiedlich schnelle Bewegung der einzelnen Fluidpartikel bewirkt eine Formänderung der Fluidelemente in der Strömung, die mit Schubspannungen verbunden ist. Dabei sind die aus der Bewegung entstehenden Schubspannungen Ausdruck der im Zusammenhang mit der Molekülbewegung stehenden inneren Fluidreibung und führen stets zu einem Verlust an mechanischer Energie mittels Dissipation. Bezeichnet wird dieses über den Reibungseinfluss zur Energiedissipation führende physikalische Verhalten einer Strömung mit dem Begriff der Zähigkeit. Dabei ist der Reibungseinfluss besonders in den Grenzschichten der wandnahen Bereiche stark ausgeprägt, während er in Gebieten, die weit entfernt von den Rändern liegen und in denen die Strömung vorwiegend parallel verläuft nur von untergeordnetem Einfluss ist. Grundlage der Zähigkeit einer Strömung ist die der inneren Fluidreibung phänomenologisch zugeordnete Stoffgröße der Viskosität μ , welche die Schubspannungen mit dem Geschwindigkeitsgradienten verknüpft. Für normalviskose Fluide hat bereits NEWTON an eindimensionalen Schichtenströmungen mit

$$\tau = \mu \frac{\partial v_n}{\partial t} \quad (2.1)$$

gezeigt, dass die Schubspannung τ dem Gradienten der normalen Geschwindigkeitskomponente v_n in tangentialer Richtung t direkt proportional ist. Die Erweiterung des NEWTONschen Materialgesetzes (2.1) für dreidimensionale Strömungen stellt das STOKESsche Materialgesetz (2.63) dar. Als Stoffgröße ist die Viskosität eine direkt messbare Materialeigenschaft, die experimentell mit Hilfe eines Scherversuches ermittelt werden kann und daher oft auch als Scherviskosität bezeichnet wird. Infolge ihres auch an ihrer Einheit (Ns)/m² sichtbaren Kraftcharak-

ters wird die Viskosität auch als dynamische Viskosität bezeichnet. Von ihr abgeleitet ist die kinematische Viskosität $\nu = \mu/\rho$, die mit der Einheit m^2/s unabhängig vom jedem Kraft- oder Massebegriff ist und daher eine kinematische Größe repräsentiert. Während eine Vielzahl der in der Natur vorkommenden und technisch relevanten Fluide, darunter auch Wasser und Luft, sehr gut über (2.1) bzw. (2.63) als NEWTONsche Fluide beschrieben werden können, reagieren manche Fluide wie z.B. Polymere in der Regel nichtlinear. Bei diesen anomalviskosen Fluiden ist dann zusätzlich im Materialgesetz noch die Belastungsstärke, ihre Änderung sowie die Belastungsdauer mit aufzunehmen. Im Rahmen dieser Arbeit erfolgt jedoch eine Beschränkung auf rein NEWTONsche Fluide, deren Materialgleichung mit (2.63) vollständig beschrieben ist.

Dichte. Neben der Viskosität μ ist die Dichte ρ der zweite wesentliche Materialparameter eines Fluides. Im Allgemeinen ist die Dichte eine vom thermodynamischen Druck p und der Temperatur T abhängige Stoffgröße, $\rho = \rho(p, T)$. Während bei Gasen die Dichte merklich vom auf den Fluidkörper wirkenden Druck abhängt, ist bei Flüssigkeiten die Volumenänderung selbst bei hohen Drücken nur sehr gering. Bei zusätzlich gering ausgeprägter Temperaturabhängigkeit, kann die Dichte als konstanter Materialparameter aufgefasst und das Fluid als dichtebeständig bezeichnet werden. Nicht ganz präzise wird synonym für die Dichtebeständigkeit häufig auch der sich eigentlich nur auf den Druck beziehende Begriff der Inkompressibilität verwendet. Infolge der bei dichtebeständigen Fluiden vorliegenden Volumenbeständigkeit führt ein isotroper Spannungszustand zu keinen Verzerrungen und damit nicht zu einer Materialbeanspruchung. Die fehlende Volumenkompression findet im Materialgesetz (2.63) Berücksichtigung. Eng verknüpft mit der Dichteänderung eines Fluides ist die Schallausbreitung. Diese erfolgt in Form von kleinen Druckstörungen, die sich als schwache Dichtewellen mit der Wellenausbreitungsgeschwindigkeit

$$c^2 = \frac{dp}{d\rho} \quad \text{mit} \quad c = c(p, T) \quad (2.2)$$

im Fluid ausbreiten. Dabei führt die Annahme der Dichtebeständigkeit mit $\rho = \text{const.}$ und $dp = 0$ zu einer unendlichen Schallausbreitungsgeschwindigkeit $c = \infty$. Damit wirken sich bei einem dichtebeständigen Fluid Druckänderungen ohne jeden Zeitverlust stets im gesamten Strömungsgebiet aus. Der Druck p geht von einer thermodynamischen in eine mechanische Größe über und stellt sich als vom Geschwindigkeitsfeld abhängiger Freiheitsgrad stets so ein, dass die Masseerhaltung gewährleistet ist. Im Rahmen dieser Arbeit werden nur Strömungen dichtebeständiger Fluide betrachtet.

2.1.2 Strömungsvorgänge

Dimensionsanalyse. Die physikalischen Vorgänge strömender Fluide lassen sich besonders gut anhand dimensionsloser Kennzahlen charakterisieren, die mittels dimensionanalytischer Betrachtungen gewonnen werden [Zie91, Hut03, Ger92, Tru08]. Unter der Ausnutzung der Dimensionshomogenität physikalischer Gesetze ist es ohne eine explizite mathematisch-physikalische Modellbildung möglich, die charakteristischen Eigenschaften einer physikalischen Situation in den das globale Strömungsgeschehen beschreibenden dimensionslosen Kennzahlen zusammenzufassen. Dabei stellen die dimensionslosen Kennzahlen Potenzprodukte dimen-

sionsbehafteter Einflussgrößen dar und reduzieren so die das physikalische Geschehen kennzeichnenden Parameter auf ein Minimum bei gleichzeitiger Bereitstellung einer allgemeingültigen Aussage. Ihre Ermittlung folgt dem nach BUCKINGHAM benannten Π -Theorem, das jeden dimensionshomogenen funktionalen Zusammenhang auf dimensionslose Produkte Π_i zurückführt, deren Anzahl in der Regel der Anzahl an Einflussgrößen reduziert um die Anzahl an Basisdimensionen entspricht und somit minimal ist. Jedoch ist die sich aus den Produkten Π_i entwickelnde Dimensionsmatrix unterbestimmt, so dass die dimensionslosen Kennzahlen nicht *a priori* festgelegt sind. Historisch haben sich für die wesentlichen Strömungsvorgänge jedoch bestimmte Kombinationen herausgebildet.

Strömungszustand. Zentrales Merkmal einer Strömung ist, dass sie in zwei vollständig verschiedene Zustände eingeteilt werden kann [Tru08, Dur06, Her08, Sch06, Fer08]. Im laminaren Strömungszustand verläuft die Bewegung der einzelnen Fluidpartikel in voneinander getrennten, parallelen Schichten (lt. *laminae*), so dass es zu keiner Vermischung kommt. Demgegenüber steht der turbulente Strömungszustand (lt. *turbare*), bei dem die Strömung einen chaotischen Charakter annimmt und es zu einer starken Durchmischung sowie einem intensiven Austausch von Masse, Impuls und Energie innerhalb der Strömung kommt. Charakteristisch für eine turbulente Strömung ist die Überlagerung der Hauptströmung mit starken räumlichen und zeitlichen Schwankungsbewegungen sowie der Ausbildung einer ganzen Bandbreite an Wirbelstrukturen, deren Energie kaskadenförmig von den großen zu den die Energie letztendlich dissipierenden kleinen Wirbeln transportiert wird. Maßgebend für die Ausbildung des chaotischen und stark wirbelbehafteten turbulenten Strömungszustandes sind die aus der inneren Reibung der Fluidpartikel hervorgerufenen Schubspannungen. Diese stehen über das NEWTONsche Materialgesetz (2.1) bzw. (2.63) in direktem Zusammenhang mit der Viskosität μ als Materialparameter des Fluides. Der Strömungszustand kann quantitativ mit der REYNOLDS-Zahl

$$\text{Re} = \frac{\rho v l}{\mu} = \frac{v l}{\nu} \quad (2.3)$$

als dimensionsloser Kennzahl beschrieben werden. In dieser sind die Fluidichte ρ sowie eine charakteristische Strömungsgeschwindigkeit v und Bezugslänge l zur Viskosität μ ins Verhältnis gesetzt. Sind die beiden Materialparameter konstant und die Geometrie unveränderlich, so legt die charakteristische Strömungsgeschwindigkeit v die REYNOLDS-Zahl und damit auch den Strömungszustand fest. Im Sinne des von RAYLEIGH eingeführten und auch als *Fractional Analysis* bezeichneten Vorgehens ist die REYNOLDS-Zahl unter Rückgriff auf den in Abschnitt 2.1.1 angesprochenen Kraftcharakter der dynamischen Viskosität auch als Verhältnis von Trägheits- zu Reibungskräften interpretierbar [Zie91]. Mit Hilfe der REYNOLDS-Zahl kann in Abhängigkeit der jeweiligen Strömungsgeometrie eine Kennzahl gefunden werden, oberhalb dieser der Strömungszustand von einem laminaren in einen turbulenten Zustand wechselt. Für Rohrströmungen liegt diese z.B. bei $\text{Re}_{\text{krit}} \approx 2300$. Dabei läuft der Übergang von einer laminaren zu einer turbulenten Strömung meist lokal konzentriert ab. Im Hinblick auf experimentelle Untersuchungen bewirkt die Gleichheit der REYNOLDS-Zahl zwischen Modell und Großausführung eine korrekte Übertragung des Reibungseinflusses.

Fließzustand. Bei Flüssigkeitsströmungen mit freien Oberflächen, wie z.B. bei Wasserströmungen in offenen Gerinnen, bei der der Freispiegel die Grenzfläche zwischen Wasser und Luft ist, spielt neben dem Reibungseinfluss noch die Wirkung der Schwerkraft g eine wesentliche Rolle [Tru08, Zan13]. Dabei bewirkt die Erdanziehung, dass unabhängig vom vorliegenden laminaren oder turbulenten Strömungszustand der Abfluss des Volumenstroms und damit die Wellenausbreitung in zwei unterschiedlichen Fließzuständen erfolgen kann. Beim strömenden Abfluss liegt eine geringe Fließgeschwindigkeit in Verbindung mit einer großen Wassertiefe vor. Dabei ist die Strömungsgeschwindigkeit geringer als die Wellenausbreitungsgeschwindigkeit des Fluides, so dass sich Oberflächenwellen auch stromaufwärts ausbreiten können. Hingegen ist beim schießenden Abfluss mit großen Strömungsgeschwindigkeiten bei nur geringen Wassertiefen die Strömungsgeschwindigkeit größer als die Wellenausbreitungsgeschwindigkeit und Oberflächenwellen können sich nur in Strömungsrichtung fortbewegen. Die Charakterisierung des Fließzustandes bei Freispiegelströmungen in einen strömenden und schießenden Abfluss erfolgt anhand der FROUDE-Zahl

$$\text{Fr} = \frac{v}{\sqrt{g h}} . \quad (2.4)$$

Sie setzt die Strömungsgeschwindigkeit v zur aus der Erdanziehung g und einer charakteristischen Wassertiefe h bestehenden Wellenausbreitungsgeschwindigkeit in Beziehung und kann als Verhältnis von Trägheits- zu Schwerkäften interpretiert werden. Anhand der FROUDE-Zahl lässt sich mit $\text{Fr} = 1$ der Grenzzustand angeben, bei dem der maximale Volumenstrom für das vorhandene Energieniveau der Strömung vorliegt. Davon abweichend ist mit $\text{Fr} < 1$ ein strömender Abfluss als unterkritischer Zustand gekennzeichnet, während überkritische Zustände mit $\text{Fr} > 1$ einen schießenden Abfluss angeben. Der Übergang von einem strömenden zu einem schießenden Zustand verläuft stetig, wohingegen sich der Umschlag von einem schießenden zurück in einen strömenden Zustand lokal stark begrenzt im Rahmen eines sog. Wechselsprunges unter Ausbildung einer Wirbelwalze vollzieht.

Die klassische Definition der FROUDE-Zahl (2.4) findet vorwiegend bei hydrodynamischen Strömungen Anwendung und vernachlässigt die nur sehr geringe Dichte der die Wasserphase begrenzenden Luft. Liegt hingegen die Dichte der Luftphase ρ_a im Bereich der Dichte der Wasserphase ρ_w , so ist die Dichtedifferenz $\Delta\rho = \rho_w - \rho_a$ nicht so ausgeprägt wie bei hydrodynamischen Strömungen und es ist die densimetrische FROUDE-Zahl

$$\text{Fr}_{\text{den}} = \frac{v}{\sqrt{\frac{\Delta\rho}{\rho_w} g h}} \quad (2.5)$$

zu verwenden [Jir07]. Diese geht für sehr große Dichtedifferenzen $\Delta\rho$ mit $\rho_w \gg \rho_a$ in die klassische Definition (2.4) über. Die densimetrische FROUDE-Zahl Fr_{den} ist die charakteristische Kennzahl bei Strömungen mit Dichteunterschieden, die zu Auftriebs- oder Konvektionskräften führen und z.B. im Mündungsbereich von Flüssen vorliegen. Soll der Schwerkrafteinfluss und damit die Ausbildung der Freispiegellage bzw. Grenzfläche im Rahmen experimenteller Untersuchungen korrekt übertragen werden, so ist die Gleichheit der FROUDE-Zahl nach (2.4) bzw. (2.5) zu gewährleisten. Da eine gleichzeitige Erfüllung von FROUDE- und REYNOLDS-Ähnlichkeit meist nur schwer umsetzbar ist, wird bei der experimentellen Untersuchung von Freispiegelströmungen in der Regel nur eine partielle Ähnlichkeit mit Gewicht auf dem Schwerkrafteinfluss realisiert.

Weitere Kennzahlen. Neben den sehr wesentlichen Kennzahlen für Reibungs- und Schwerkrafteinfluss sind insbesondere bei dichtebeständigen Fluiden noch die in den inkompressiblen NAVIER-STOKES-Gleichungen (2.67) auftretenden EULER-, MACH- und STROUHAL-Zahlen maßgebend:

$$\text{Eu} = \frac{p}{\rho v^2}, \quad \text{Ma} = \frac{v}{c}, \quad \text{Str} = \frac{l}{v t}. \quad (2.6)$$

Die EULER-Zahl Eu beschreibt den Einfluss der Druckkräfte und kann als das Verhältnis von Druck- zu Trägheitskraft interpretiert werden. Sie ist bis auf den Faktor $1/2$ identisch mit dem Druckbeiwert c_p und kann für dichtebeständige Fluide als abhängige Größe von REYNOLDS- und FROUDE-Zahl formuliert werden. Die MACH-Zahl Ma kennzeichnet den Einfluss der Dichteveränderlichkeit bei Flüssigkeitsströmungen mit sehr hohen Strömungsgeschwindigkeiten sowie bei Gasströmungen. Für kleine MACH-Zahlen $\text{Ma} < 0.3$ können auch Gase trotz ihrer im Allgemeinen druckabhängigen Dichte als inkompressibel behandelt werden. Die STROUHAL-Zahl Str charakterisiert instationäre Strömungen mit schwingungsanregenden Wirbelablösungen. Sie kann als Verhältnis von instationären zu stationären Trägheitskräften gedeutet werden und verschwindet für rein stationäre Strömungen.

2.1.3 Mehr-Phasen-Strömungen

Auftreten. Neben rein einphasigen Strömungen tritt bei vielen technisch relevanten Anwendungen auch eine Strömung mit mehreren Phasen oder Komponenten auf [Pro09, Lau11, Bre05, Böh12, Oj06]. So können z.B. Blasenströmungen in Rohrleitungen, der Geschiebetransport in Flüssen oder die Überströmung von Wehren und Schützen als Mehr-Phasen-Strömungen aufgefasst werden. Infolge der Interaktion der einzelnen Phasen kommt es zu einer Beeinflussung und Veränderung des Strömungsverhaltens, das sich auf die das Strömungsgebiet berandende Struktur auswirkt. Insbesondere kann die in Kapitel 5 untersuchte Durchströmung von Schaufelwasserrädern im Hinblick auf die bei der Befüllung und Entleerung der Schaufelräume auftretenden Interaktion nur korrekt abgebildet werden, wenn sowohl die Wasser- als auch die Luftphase Berücksichtigung finden. Aber auch bei den in Kapitel 4 betrachteten Wehren und Schützen kann insbesondere der Bereich des Tosbeckens, in dem es infolge des Wechselsprunges zu einer starken Vermischung von Wasser und Luft kommt, sowie bei Lufteinschlüssen auch der Bereich des Wehrrückens nur zutreffend wiedergegeben werden, wenn der Überströmungsvorgang als Mehr-Phasen-Strömung erfasst wird. In beiden Fällen stehen die Fluidphasen über ihre gemeinsame Grenzfläche in Wechselwirkung miteinander, wobei sich die räumlichen und zeitlichen Skalen innerhalb jedes Fluidgebietes teils erheblich voneinander unterscheiden können. Die Grenzfläche ist dabei derjenige Bereich, in dem sich die Materialparameter verändern, wobei sich die Veränderung nur über wenige Moleküle erstreckt und damit makroskopisch unstetig verläuft. Mechanisch besteht an der Grenzfläche eine Kopplung zwischen den Geschwindigkeiten und Spannungen beider Fluidphasen.

Beschreibungsarten. Die Beschreibung von Mehr-Phasen-Strömungen ist stark abhängig vom betrachteten Anwendungsfall, dem dabei vorliegenden Strömungszustand und den damit verbundenen physikalischen Transportprozessen über die Phasengrenzfläche. Neben der in Abschnitt 3.3 besprochenen direkten Beschreibung auf Basis der NAVIER-STOKES-Gleichungen

in Verbindung mit einem Grenzflächenauflösungsverfahren, wie z.B. der *Level-Set*-Methode, existieren für spezielle Strömungen auch vereinfachende Beschreibungsweisen. Gemeinsam ist allen vereinfachenden Beschreibungsweisen, dass bei ihnen die Mehr-Phasen-Strömung mittels sich einander durchdringender Kontinua modelliert wird. Nach Einführung eines Phasenindikators erfolgt eine Volumenmittelung, die Eingang in die Modellgleichungen findet. In Abhängigkeit des verwendeten Vorgehens zur Schließung des Modellgleichungssatzes ergeben sich unterschiedliche Varianten. Beim homogenen Modell werden an der Grenzfläche gleiche Geschwindigkeiten angenommen und die Materialparameter in Abhängigkeit des Phasenindikators beschrieben, so dass das gesamte Strömungsfeld mit nur einem einzigen Gleichungssatz erfasst ist. Es findet Anwendung bei einer ausgeprägten Trennung der einzelnen Phasen sowie bei Strömungen unter starkem Schwerkräfteinfluss. Infolge des schnellen Wechsels der Materialparameter im Bereich der Grenzfläche kommt es jedoch bei numerischen Berechnungen meist zu einem Genauigkeitsverlust. Bei blasengetriebenen Strömungen findet häufig das Diffusions- bzw. *Drift-Flux*-Modell Anwendung, das eine Erweiterung des homogenen Modells darstellt und bei dem die über eine algebraische Beziehung gekoppelten Strömungsgeschwindigkeiten an der Phasengrenzfläche voneinander abweichen können. Gegenüber dem homogenen Modell wird beim 2-Fluid-Modell eine getrennte Beschreibung der Fluidphasen verwendet, so dass jede Phase ihren eigenen Gleichungssatz besitzt und in den Bilanzen Kopplungsterme hinzutreten, die die an der Phasengrenzfläche auftretenden Wechselwirkungen berücksichtigen. Dabei stellt das 2-Fluid-Modell nur dann eine korrekt gestellte Formulierung dar und besitzt reelle Charakteristiken, wenn die relative Strömungsgeschwindigkeit an der Grenzfläche unterhalb eines kritischen Wertes bleibt [Ste79]. Speziell bei dispersen Mehr-Phasen-Strömungen, wie Partikel- und Blasenströmungen, bei denen eine Phase punktuell verteilt in der anderen, kontinuierlichen Phase vorliegt, erfolgt die Verwendung des EULER-LAGRANGE-Modells. Dabei wird die kontinuierliche Phase weiterhin in EULERScher Betrachtungsweise über ihre kontinuumsmechanischen Modellgleichungen beschrieben, während die disperse Phase als Massepunkte in LAGRANGEScher Betrachtungsweise erfasst wird und beide Phasen über Kopplungsterme miteinander wechselwirken.

Im Rahmen dieser Arbeit wird die Freispiegelströmung bei der Überströmung eines Kreisbogenschützes und bei der Durchströmung eines Schaufelwasserrades als Zwei-Phasen-Strömung betrachtet, um den Einfluss der Luft- auf die Wasserphase berücksichtigen zu können. In beiden Fällen kann *a priori* keine Annahme zu Gestalt und Bewegung der Grenzfläche gemacht werden, so dass Modellannahmen im Hinblick auf eine vereinfachende Beschreibung nicht möglich sind. Stattdessen erfolgt eine direkte Beschreibung auf Basis der inkompressiblen NAVIER-STOKES-Gleichungen in Verbindung mit der in Abschnitt 3.3.2 beschriebenen *Level-Set*-Methode als Grenzflächenverfolgungsverfahren und der in Abschnitt 3.2.2 umgesetzten Raum-Zeit-Finite-Elemente-Formulierung als numerischem Lösungsverfahren.

2.2 Kontinuumsmechanische Grundlagen

2.2.1 Einführung

Die Beschreibung der Strömungsvorgänge erfolgt im Rahmen der Kontinuumsmechanik. Dabei werden die physikalischen Vorgänge auf makroskopischer Ebene betrachtet, indem eine Homogenisierung der auf mikroskopischer Ebene diskret vorhandenen Materialeigenschaften vorgenommen wird. Die sich daraus ergebenden Zustandsgrößen und physikalischen Parameter besitzen innerhalb der so entstehenden phänomenologischen Feldtheorie einen hinreichend glatten und stetigen Verlauf. Auch wenn ein vollständig axiomatischer Aufbau der Kontinuumsmechanik, wie ihn HILBERT bereits 1900 gefordert hat [Hil00], trotz der Bemühungen von HAMEL [Ham67], NOLL [Nol74] und TRUESDELL [Tru91] bisher nicht abschließend gelungen ist, so lassen sich die Strömungsvorgänge von ein- und mehrphasigen Fluiden sowie ihre Interaktion mit Festkörpern sehr gut im Rahmen einer kontinuumsmechanischen Betrachtungsweise beschreiben. Die nachfolgende Einführung und Zusammenstellung der grundlegenden Begriffe und Konzepte der Kontinuumsmechanik orientiert sich im Wesentlichen an [Ste96, Alt12, Red08] sowie im Hinblick auf die speziellen Aspekte der Strömungsmechanik im Zusammenhang mit einem beweglichen Beobachter an [Ari89, Tru08, Spu07, Dur06, Don03, Wal99].

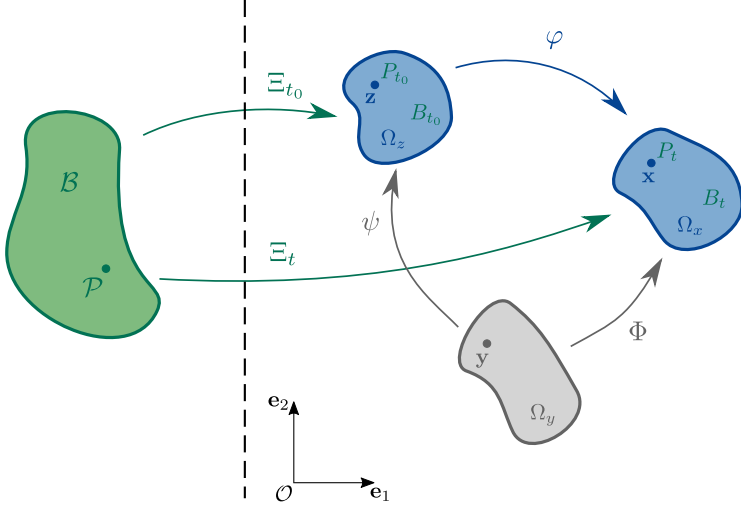
Entsprechend der kontinuumsmechanischen Beschreibung von Festkörpern kann auch ein Fluidkörper \mathcal{B} als zusammenhängende Menge \mathcal{M} materieller Punkte \mathcal{P} aufgefasst werden. Unter Ausschluss von polaren Freiheitsgraden stellt der materielle Körper \mathcal{B} ein BOLTZMANN-Kontinuum dar, in dem jeder Partikel \mathcal{P} neben seinen physikalischen Eigenschaften drei Verschiebungsrichtungen u_i besitzt [Nol74, Cos09, Bol87]. Der Bewegungsvorgang findet im Anschauungsraum \mathcal{E}_t der Ereigniswelt \mathcal{E} statt, wobei mit $\mathcal{E} = \bigcup_{t \in \mathcal{T}} \mathcal{E}_t$ diese eine im Zeitbereich \mathcal{T} kontinuierliche Folge von Anschauungsräumen darstellt. Nach Kennzeichnung des ausgezeichneten Punktes \mathcal{O} als festen Bezugspunkt und Einführen einer Basis $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ ist der Anschauungsraum mit einer mathematischen Struktur belegt und kann als EUKLIDISCHER Punkt- bzw. Vektorraum \mathbb{E}^3 aufgefasst werden, so dass quantitativ sowohl eine Lage- als auch Abstandsbeschreibung der einzelnen Punkte möglich wird. Dabei überführt der Beobachter

$$\Sigma: \mathcal{E} \mapsto \mathbb{R}^4 \quad (2.7)$$

die Ereigniswelt in den aus den drei Raumrichtungen \mathbf{e}_i und der Zeit t bestehenden vierdimensionalen Vektorraum \mathbb{R}^4 und bildet gleichzeitig den Fluidkörper \mathcal{B} in den als EUKLIDISCHEN Vektorraum beschriebenen Anschauungsraum mit Hilfe der Abbildung Ξ ab:

$$\Xi: \begin{cases} \mathcal{B} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ (\mathcal{M}, t) \longmapsto \mathbf{x} = \Xi(\mathcal{M}, t) = \Xi_t(\mathcal{M}) \end{cases} \quad (2.8)$$

Die Zuordnung der Partikel \mathcal{P} auf die Raumpunkte \mathbf{x} ermöglicht die Identifizierung der Partikel anhand ihrer Ortsvektoren und belegt gleichzeitig die Raumpunkte mit den physikalischen Eigenschaften der Partikel. In Abbildung 2.1 ergibt die zum Zeitpunkt t dargestellte Abbildung Ξ_t des Fluidgebietes \mathcal{B} auf das als Untermenge des Anschauungsraumes \mathbb{E}^3 bezeichnete Gebiet $\Omega_{\mathbf{x}}$ seine Konfiguration B_t . Dabei gilt stets, dass die Abbildung Ξ bijektiv und damit die Zuordnung von Partikeln und Raumpunkten umkehrbar eindeutig ist, so dass sich zum selben Zeitpunkt ein Partikel nur an einem Raumpunkt befinden und ein Raumpunkt nur von einem Partikel belegt sein kann.

Abb. 2.1: Abbildung des Körpers \mathcal{B} in den Euklidischen Raum

2.2.2 Betrachtungsweisen

Beobachter. Die kinematische Beschreibung des Bewegungsvorganges des Fluidkörpers \mathcal{B} im Anschauungsraum \mathbb{E}^3 erfolgt aus der Betrachtungsweise des Beobachters. Dazu benötigt er sowohl die Abbildung Ξ nach Gleichung (2.8) als auch ein Koordinatensystem zur Quantifizierung des Bewegungsvorganges. Der Beobachter kann sowohl mit der Abbildung Ξ als auch mit seinem Koordinatensystem identifiziert werden [Ste96, Wal99]. Er stellt das Bezugssystem dar, in dem die Beschreibung des Bewegungsvorganges vorgenommen wird. Prinzipiell ist der Bewegungsvorgang mit der Abbildung der Fluidpartikel in den Anschauungsraum nach Gleichung (2.8) vollständig theoretisch beschrieben, jedoch eignet sich diese Darstellung nicht für numerische Berechnungen. Daher haben sich noch die LAGRANGESche, die EULERSche und die ALE-Betrachtungsweise zur quantitativen Beschreibung des Bewegungsvorganges herausgebildet. In jeder dieser drei Betrachtungsweisen verhält sich der Beobachter unterschiedlich, so dass die Wahl der Betrachtungsweise insbesondere infolge von Veränderungen in der Zeitableitung Auswirkungen auf die mathematische Gestalt der Grundgleichungen hat. Unabhängig von der gewählten Betrachtungsweise können jedoch stets zwei ausgezeichnete Konfigurationen im Bewegungsvorgang gekennzeichnet werden. In Abbildung 2.1 ist sowohl die Abbildung Ξ_{t_0} des Fluidkörpers \mathcal{B} zum Zeitpunkt t_0 auf das Gebiet Ω_z dargestellt, die zur Konfiguration B_{t_0} führt, als auch die Abbildung Ξ_t , die den Körper zum Zeitpunkt t auf das Gebiet Ω_x abbildet und die Konfiguration B_t ergibt. Dabei kann der Zeitpunkt t_0 als Beginn des Bewegungsvorganges und damit B_{t_0} als Ausgangskonfiguration aufgefasst werden, während B_t die Momentankonfiguration zum beliebigen Zeitpunkt t darstellt. Der Bewegungsvorgang findet somit von der Ausgangskonfiguration B_{t_0} beginnend zur Momentankonfiguration B_t statt und kann formal anhand der Abbildung φ beschrieben werden.

LAGRANGESche Betrachtungsweise. In der von EULER eingeführten und nach LAGRANGE benannten Betrachtungsweise verfolgt der Beobachter die einzelnen Partikel von ihrer Ausgangskonfiguration in die momentane Konfiguration und beobachtet die Veränderung ihrer physikalischen Eigenschaften. Dabei werden sämtliche Beschreibungsgrößen des Bewegungsvorganges auf die Ausgangskonfiguration bezogen, so dass diese auch als Referenzkonfiguration bezeichnet wird. Infolge der Bijektivität der Abbildung Ξ können die Partikel auch mit den Ortsvektoren \mathbf{z} der Ausgangskonfiguration identifiziert werden. Diese stellen dann die unabhängigen Variablen des Bewegungsvorganges dar, so dass sich eine physikalische Partikeleigenschaft g formal schreiben lässt als

$$g = \check{g} = g(\mathbf{z}, t) \quad \text{mit} \quad \mathbf{z} = \text{const.} \quad \text{und} \quad \mathbf{z} = \Xi(\mathcal{M}, t_0) = \Xi_{t_0}(\mathcal{M}) . \quad (2.9)$$

Die LAGRANGESche Betrachtungsweise wird auch als materielle Betrachtungsweise und ihre Koordinaten \mathbf{z} als materielle Koordinaten bezeichnet. Aus der Verfolgung der Bahnlinien der einzelnen Partikel von der Ausgangs- in die Momentankonfiguration folgt eine nichtlineare Kinematik, die sich im GREEN-LAGRANGESchen bzw. EULER-ALMANSISchen Verzerrungstensor wiederfindet. Die LAGRANGESche Betrachtungsweise ist die grundlegende Betrachtungsweise in der Festkörpermechanik, bei der der Bewegungsvorgang von einer klar definierten und interessierenden Ausgangs- in eine Endlage stattfindet. In der Fluidmechanik findet sie nur Anwendung, wenn wie z.B. bei Freispiegelströmungen oder Fluid-Struktur-Interaktionen veränderliche Gebietsränder vorhanden sind.

EULERSche Betrachtungsweise. Gegenüber der LAGRANGESchen Betrachtungsweise fokussiert der Beobachter bei der von DANIEL BERNOULLI eingeführten und nach EULER benannten Betrachtungsweise seinen Blick auf die festen Raumpunkte \mathbf{x} , an denen der momentane Bewegungsvorgang zum Zeitpunkt t stattfindet und registriert hier die Veränderung der Zustandsgröße g . Damit wird die Zustandsgröße g formal zu einer Feldfunktion und lässt sich schreiben als

$$g = g(\mathbf{x}, t) \quad \text{mit} \quad \mathbf{x} = \text{const.} \quad \text{und} \quad \mathbf{x} = \Xi(\mathcal{M}, t) = \Xi_t(\mathcal{M}) . \quad (2.10)$$

Der Raumpunkt \mathbf{x} besitzt jedoch selbst keine physikalischen Eigenschaften, sondern wird anhand des Partikels, der sich zum Beobachtungszeitpunkt t dort befindet, mit den jeweiligen Zustandsgrößen belegt. Aufgrund der Fokussierung des Beobachters auf die festen Raumpunkte wird die EULERSche Betrachtungsweise auch als ortsfeste Betrachtungsweise bezeichnet. Auch wenn die Bahnlinien der einzelnen Partikel in dieser Betrachtungsweise nicht verfolgt werden, so ist aufgrund der Stetigkeit der Abbildungen Ξ_{t_0} , Ξ_t und φ prinzipiell eine Rückverfolgung der Partikel möglich. Die EULERSche Betrachtungsweise weist gegenüber der LAGRANGESchen Betrachtungsweise eine lineare Kinematik auf (vgl. Abschnitt 2.3.2), jedoch führt die ortsfeste Betrachtung auf einen konvektiven, nichtlinearen Anteil in der Zeitableitung (vgl. Abschnitt 2.2.3). In der Fluidmechanik ist die EULERSche Betrachtungsweise die vorherrschende Art der Beobachtung des Strömungsvorganges, da das Interesse primär in den ortsfesten Zustandsgrößen des Strömungsfeldes besteht und die vollständige Deformationsgeschichte des Fluidkörpers in der Regel nicht von Interesse ist.

ALE-Betrachtungsweise. Ist jedoch der Rand des Strömungsgebietes in Teilbereichen oder insgesamt veränderlich, wie es z.B. bei Freispiegelströmungen an der Grenzfläche zwischen Wasser und Luft oder bei der Interaktion von Strömungen mit elastischen oder drehbar gelagerten Festkörpern vorkommt, so kann das Strömungsgeschehen nicht mehr auf dem gesamten Gebiet mit Hilfe der EULERSchen Betrachtungsweise erfasst werden. Die ortsfeste Betrachtung verhindert die notwendige Verfolgung der sich in der Nähe des beweglichen Randes befindenden Partikel. Daher wurde für Strömungen, bei denen sich das Gebiet in der Zeit verändert, die *Arbitrary-Lagrangian-Eulerian*-Betrachtungsweise (ALE-Betrachtungsweise) entwickelt [Don77, Hug81, Bru95, Wal99, Kno10, Don03]. In ihr kann der Beobachter in beliebiger Abstufung zwischen der materiellen und ortsfesten Betrachtungsweise hin und her wechseln, so dass er sich sowohl unabhängig von den Fluidpartikeln bewegen kann als auch nicht mehr auf feste Raumpunkte festgelegt ist. Dies ermöglicht es ihm z.B. im Inneren des Strömungsgebietes eine EULERSche Betrachtungsweise anzunehmen, während er am beweglichen Rand im Rahmen einer LAGRANGESchen Betrachtungsweise die Bewegung der Randpartikel verfolgt. Im Übergangsbereich zwischen dem inneren Gebiet mit EULERScher Betrachtungsweise und dem Randgebiet mit LAGRANGEScher Betrachtungsweise ist seine Beobachtung zwar bereits unabhängig von den Partikeln, jedoch noch nicht vollständig ortsfest. Damit wird dem Beobachter sein eigenes Gebiet Ω_y zugeordnet, über das er analog zu den Partikeln in der Ausgangskonfiguration \mathbf{z} anhand seiner Koordinaten \mathbf{y} identifiziert werden kann. In Abbildung 2.1 ist das Beobachtergebiet Ω_y zusammen mit dem materiellen Gebiet Ω_z und dem räumlichen Gebiet Ω_x dargestellt. Die Zuordnung des Beobachters \mathbf{y} zu den Fluidpartikeln \mathbf{z} bzw. zu den Raumpunkten \mathbf{x} erfolgt mit Hilfe der Abbildungen Φ und Ψ :

$$\Phi : (\mathbf{y}, t) \mapsto \mathbf{x} = \Phi(\mathbf{y}, t) = \Phi_t(\mathbf{y}) \quad (2.11) \quad \Psi : (\mathbf{y}, t) \mapsto \mathbf{z} = \Psi(\mathbf{y}, t) = \Psi_t(\mathbf{y}) \quad (2.12)$$

Somit kann der Bewegungsvorgang der Fluidpartikel von der Ausgangskonfiguration in die Momentankonfiguration auch in Abhängigkeit des Beobachters formuliert werden:

$$\varphi = \Phi \circ \Psi^{-1} \quad \text{mit} \quad \varphi : (\mathbf{z}, t) \mapsto \mathbf{x} = \varphi(\mathbf{z}, t) = \varphi_t(\mathbf{z}) \quad (2.13)$$

Die Quantifizierung der Zustandsgröße g erfolgt vom Beobachter \mathbf{y} auf seinem Gebiet Ω_y , das im Rahmen der ALE-Betrachtungsweise als Referenzgebiet dient und sich relativ zum materiellen Gebiet Ω_z und zum räumlichen Gebiet Ω_x bewegt. Damit gilt für die von ihm beobachtete Zustandsgröße

$$g = \tilde{g} = g(\mathbf{y}, t) \quad \text{mit} \quad \mathbf{y} = \text{const.} , \quad (2.14)$$

wobei zwischen den funktionalen Ausdrücken der Zustandsgröße g auf den unterschiedlichen Gebieten Ω_x , Ω_y und Ω_z unter Verwendung der Abbildungen Φ und Ψ eine Überführung ineinander möglich ist:

$$g = g(\mathbf{x}, t) = \tilde{g}(\mathbf{y}, t) = \check{g}(\mathbf{z}, t) \quad \Longleftrightarrow \quad g = g \circ \Phi = g \circ \Phi \circ \Psi^{-1} . \quad (2.15)$$

Die unabhängige Bewegungsmöglichkeit des Beobachters führt dazu, dass in der Regel das Beobachtergebiet Ω_y weder vollständig identisch mit dem materiellen Gebiet Ω_z noch mit dem räumlichen Gebiet Ω_x ist und die vom Beobachter quantifizierte Zustandsgröße \tilde{g} von der Relativbewegung zwischen Beobachter und Fluidpartikel beeinflusst wird. Dadurch kann der Verlauf der quantifizierten Zustandsgröße \tilde{g} weder eindeutig einem bestimmten Fluidpartikel

\mathbf{z} noch einer festen Raumposition \mathbf{x} zugeordnet werden, sondern stellt einen Zwischenzustand zwischen dem direkt den Partikeln zugeordneten Verlauf \check{g} und dem rein räumlichen Verlauf g dar. Der Übergang von der ALE-Betrachtungsweise sowohl in die LAGRANGESche als auch in die EULERSche Betrachtungsweise ist fließend. Im Grenzfall kann sich der Beobachter mit den Partikeln vollständig mitbewegen, so dass er direkt die Veränderung stets an denselben Fluidpartikeln beobachtet und sich so aus der ALE-Betrachtungsweise die LAGRANGESche Betrachtungsweise entwickelt:

$$\Psi = \mathbf{I} \longrightarrow \Omega_y = \Omega_z \quad , \quad \mathbf{y} = \mathbf{z} \quad , \quad \check{g} = g \quad . \quad (2.16)$$

Verbleibt er hingegen an festen Raumpunkten, so geht die ALE-Betrachtungsweise in die EULERSche Betrachtungsweise über:

$$\Phi = \mathbf{I} \longrightarrow \Omega_y = \Omega_x \quad , \quad \mathbf{y} = \mathbf{x} \quad , \quad \check{g} = g \quad . \quad (2.17)$$

Somit ist es im Rahmen einer ALE-Betrachtungsweise möglich im Beobachtungsgebiet in Abhängigkeit der strömungsmechanischen Vorgänge sowohl lokal eine materielle als auch eine ortsfeste Betrachtungsweise einzunehmen und damit die beiden klassischen Betrachtungsweisen der Kontinuumsmechanik miteinander zu verbinden.

2.2.3 REYNOLDSSches Transporttheorem

Als Ausgangspunkt zur Herleitung sämtlicher Bilanzgleichungen der Kontinuumsmechanik kann das REYNOLDSSche Transporttheorem angesehen werden. Es betrachtet die zeitliche Veränderung der physikalischen Eigenschaft eines sich im Raum bewegenden Fluidkörpers B_t und überführt die auf die Partikel bezogenen physikalischen Eigenschaften \check{g} in seiner klassischen Form in das Raumgebiet Ω_x bzw. in der im Rahmen der ALE-Betrachtungsweise formulierten Erweiterung in das Beobachtergebiet Ω_y . Dabei beeinflusst jedoch die Beobachtung der Veränderung der physikalischen Partikeleigenschaften \tilde{g} in einem sich unabhängig von den Partikeln im Raum bewegenden Beobachtergebiet Ω_y sowohl die Form der materiellen Zeitableitung $\frac{d\bullet}{dt}$ als auch die Grundgestalt der Bilanzgleichungen und ist daher bei der Aufstellung des REYNOLDSSchen Transporttheorems zu berücksichtigen.

Partikeleigenschaft. Mathematisch kann die zeitliche Änderung der physikalischen Eigenschaft eines Partikels $\check{g} = g(\mathbf{z}, t)$ als vollständige Differentiation in Richtung der Zeit ausgedrückt werden

$$\frac{d(\bullet)}{dt} = \left. \frac{\partial(\bullet)}{\partial t} \right|_{\mathbf{z}} \quad , \quad (2.18)$$

wobei diese, unter der Maßgabe stets denselben Partikel \mathbf{z} zu betrachten, in eine partielle Zeitableitung überführbar ist. Damit lässt sich unter Verwendung der Abbildung Ψ^{-1} mit $\check{g}(\mathbf{z}, t) = \tilde{g}(\mathbf{y}(\mathbf{z}, t), t)$ die materielle Zeitableitung einer Partikeleigenschaft in Abhängigkeit eines sich bewegenden Beobachters schreiben als:

$$\frac{d\check{g}}{dt} = \left. \frac{\partial\check{g}}{\partial t} \right|_{\mathbf{z}} = \left. \frac{\partial\tilde{g}}{\partial t} \right|_{\mathbf{y}} + \frac{\partial\tilde{g}}{\partial\mathbf{y}} \frac{\partial\mathbf{y}}{\partial t} \bigg|_{\mathbf{z}} \quad \text{mit} \quad \mathbf{w} = \left. \frac{\partial\mathbf{y}}{\partial t} \right|_{\mathbf{z}} \quad . \quad (2.19)$$

Dabei stellt $\left. \frac{\partial \mathbf{y}}{\partial t} \right|_{\mathbf{z}}$ die Partikelgeschwindigkeit \mathbf{w} im Referenzsystem Ω_y dar. Versteht man in Gleichung (2.19) die Partikeleigenschaft als Position des Partikels \mathcal{P} im Raum, ausgedrückt anhand seiner räumlichen Koordinate \mathbf{x} , so folgt für die Partikelgeschwindigkeit \mathbf{v} im Raum Ω_x :

$$\left. \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial t} \right|_{\mathbf{z}} = \left. \frac{\partial \tilde{\mathbf{x}}}{\partial t} \right|_{\mathbf{y}} + \mathbf{w} \frac{\partial \tilde{\mathbf{x}}}{\partial \mathbf{y}} \quad \text{mit} \quad \mathbf{v} = \left. \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial t} \right|_{\mathbf{z}} \quad \text{und} \quad \mathbf{v}_o = \left. \frac{\partial \tilde{\mathbf{x}}}{\partial t} \right|_{\mathbf{y}} \quad (2.20)$$

Gleichung (2.20) stellt einen Zusammenhang zwischen der Partikelgeschwindigkeit \mathbf{v} und der Geschwindigkeit des Beobachters \mathbf{v}_o im Raum Ω_x dar, so dass sich mit

$$\mathbf{c} = \mathbf{v} - \mathbf{v}_o \quad (2.21)$$

die Relativgeschwindigkeit zwischen beiden ergibt, die auch als konvektive ALE-Geschwindigkeit bezeichnet wird. Mit ihr und unter Verwendung der Abbildung Φ mit $\tilde{g}(\mathbf{y}, t) = g(\mathbf{x}(\mathbf{y}, t), t)$ lässt sich Gleichung (2.19) in die als Grundgleichung der ALE-Betrachtungsweise bezeichnete Form überführen:

$$\left. \frac{\partial \tilde{g}}{\partial t} \right|_{\mathbf{z}} = \left. \frac{\partial \tilde{g}}{\partial t} \right|_{\mathbf{y}} + \mathbf{c} \frac{\partial g}{\partial \mathbf{x}}. \quad (2.22)$$

In ihr wird die materielle Zeitableitung, die die zeitliche Änderung einer physikalischen Partikeleigenschaft darstellt, in die Gestalt überführt, wie sie bei einem sich bewegenden Beobachter auftritt. Hierbei verbleibt der erste Term in Gleichung (2.22) als instationärer Anteil in den Koordinaten \mathbf{y} des Beobachters, während der zweite Term als konvektiver Anteil in den Koordinaten des räumlichen Gebietes \mathbf{x} formuliert ist. Die Überführung der Betrachtung der zeitlichen Änderung der physikalischen Partikeleigenschaft, die in Gleichung (2.19) noch in den Koordinaten des Beobachtergebietes \mathbf{y} auftritt, in die Koordinaten des Raumgebietes \mathbf{x} beschreibt die Veränderung in der Art, wie sie tatsächlich auf dem Raumgebiet stattfindet. Unberührt davon erfolgt die Beobachtung der Veränderung weiterhin anhand des sich bewegenden Beobachters, jedoch ist seine relative Wahrnehmung in die absolute Darstellung des räumlichen Gebietes transformiert worden. Dabei stellt die Verwendung der räumlichen Koordinaten keine Verwendung der EULERSchen Betrachtungsweise dar, sondern lediglich die Verwendung von räumlichen Koordinaten innerhalb einer ALE-Betrachtungsweise. Die ALE-Grundgleichung (2.22) verknüpft somit den funktionalen Zusammenhang einer physikalischen Eigenschaft g zwischen Materialgebiet Ω_z , Referenzgebiet Ω_y und räumlichem Gebiet Ω_x .

Körpereigenschaft. In der Kontinuumsmechanik werden die Bilanz- und Erhaltungsgleichungen nicht für die physikalische Eigenschaft einzelner Partikel \mathcal{P} formuliert, sondern für die integrale Zustandsgröße G eines Körpers \mathcal{B}_t . Diese ergibt sich aus der Integration über die differentiellen Massepunkte dm der Partikel \mathcal{P} bzw. über deren zugehöriges in der Zeit veränderliches Volumen:

$$G(t) = \int dG = \int_M g^* dm = \int_{V(t)} g dV. \quad (2.23)$$

Dabei stellt g^* eine massenspezifische und g eine volumenspezifische physikalische Partikeleigenschaft dar, wobei letztere auch als Eigenschaftsdichte bezeichnet wird. Beide spezifischen Größen sind über die Dichte miteinander gekoppelt: $g = \rho g^*$. Für die zeitliche Änderung der

extensiven Eigenschaft G des Körpers \mathcal{B}_t , die vom Beobachter auf seinem Gebiet Ω_y zum Zeitpunkt t beobachtet wird, gilt damit:

$$\frac{dG}{dt} = \frac{d}{dt} \int_{\Omega_y(t)} \tilde{g} \, d\Omega_y = \left. \frac{\partial}{\partial t} \right|_{\mathbf{z}} \int_{\Omega_y(t)} \tilde{g} \, d\Omega_y . \quad (2.24)$$

Eine direkte Ausführung der Differentiation des Integralausdruckes ist infolge der zeitveränderlichen Grenzen, die sich aus der Bewegung des Beobachters ergeben, nur sehr aufwendig durchführbar. Neben der Anwendung der LEIBNIZ-Regel, die der Bildung der Stammfunktion bedarf, bietet sich daher besonders die Überführung des Integrationsgebietes auf das zeitunabhängige Materialgebiet Ω_z an. Unter Verwendung der Transformationsbeziehung

$$d\Omega_y = J_{yz} \, d\Omega_z \quad \text{mit} \quad J_{yz} = \det(\nabla_{\mathbf{z}} \mathbf{y}) \quad (2.25)$$

gelingt mit Hilfe der Determinante J_{yz} der beide Gebiete verknüpfenden Funktionalmatrix die Überführung des Integrals in das materielle Gebiet, so dass in Gleichung (2.24) das Integrationsgebiet zeitunabhängig wird und die Differentiation innerhalb der Integrationsgrenzen durchgeführt werden kann:

$$\frac{dG}{dt} = \int_{\Omega_z} \left[\left. \frac{\partial \tilde{g}}{\partial t} \right|_{\mathbf{z}} J_{yz} + \tilde{g} \frac{dJ_{yz}}{dt} \right] d\Omega_z . \quad (2.26)$$

Unter Ausnutzung von Gleichung (2.19) und der aus der Zeitableitung der Determinante folgenden Identität

$$\frac{dJ_{yz}}{dt} = (\nabla_{\mathbf{y}} \cdot \mathbf{w}) J_{yz} \quad (2.27)$$

ergibt sich damit die zeitliche Änderung der integralen Zustandsgröße G des Körpers B_t beschrieben auf dem Gebiet Ω_y des Beobachters zu

$$\frac{dG}{dt} = \int_{\Omega_y} \left[\left. \frac{\partial \tilde{g}}{\partial t} \right|_{\mathbf{y}} + \nabla_{\mathbf{y}} \cdot (\mathbf{w} \tilde{g}) \right] d\Omega_y \quad \text{in} \quad \Omega_y . \quad (2.28)$$

Wie bereits bei der Betrachtung der zeitlichen Änderung einer physikalischen Partikeleigenschaft, ist es jedoch für numerische Berechnungen zweckmäßiger, die Veränderung der integralen Zustandsgröße G unmittelbar auf dem Raumgebiet Ω_x zu beschreiben. Da für die extensive Größe G die Integration auf jedem der drei Gebiete durchführbar ist,

$$G(t) = \int_{\Omega_z} \tilde{g} \, d\Omega_z = \int_{\Omega_x(t)} g \, d\Omega_x = \int_{\Omega_y(t)} \tilde{g} \, d\Omega_y , \quad (2.29)$$

kann als Ausgangspunkt auch das Raumgebiet Ω_x gewählt werden, so dass in analogem Vorgehen zu den Gleichungen (2.24) und (2.25) mit der Transformationsbeziehung zwischen Raum- und Materialgebiet

$$d\Omega_x = J_{xz} \, d\Omega_z \quad \text{mit} \quad J_{xz} = \det(\nabla_{\mathbf{z}} \mathbf{x}) \quad (2.30)$$

und unter Verwendung der ALE-Grundgleichung (2.22) die zeitliche Änderung der Zustandsgröße G des Körpers B_t auch auf dem räumlichen Gebiet Ω_x möglich ist:

$$\frac{dG}{dt} = \int_{\Omega_x} \left[\left. \frac{\partial \tilde{g}}{\partial t} \right|_{\mathbf{y}} + \mathbf{c} \cdot \nabla_{\mathbf{x}} g + g \nabla_{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{v} \right] d\Omega_x \quad \text{in } \Omega_x. \quad (2.31)$$

In dieser Darstellung erfolgt die Beobachtung der Veränderung zwar weiterhin von einem sich frei im Raum und unabhängig von den Partikeln bewegendem Beobachter, jedoch führt die Formulierung im Raumgebiet Ω_x auf eine absolute Quantifizierung der Zustandsänderung, die von den Einflüssen aus der Relativbewegung zwischen Partikel und Beobachter befreit wurde. Aus ihr folgt bei einem sich nicht bewegendem Beobachter mit $\mathbf{v}_o = \mathbf{0}$ und damit $\mathbf{c} = \mathbf{v}$ unter Berücksichtigung von Gleichung (2.17) die EULERSche Betrachtungsweise in räumlicher Darstellung:

$$\frac{dG}{dt} = \int_{\Omega_x} \left[\left. \frac{\partial g}{\partial t} \right|_{\mathbf{x}} + \nabla_{\mathbf{x}} \cdot (\mathbf{v} g) \right] d\Omega_x \quad \text{in } \Omega_x. \quad (2.32)$$

Transporttheorem. Unter Verwendung des GAUSSschen Integralsatzes können sowohl die referentielle Darstellung (2.28) der zeitlichen Änderung der integralen Zustandsgröße G als auch der EULERSche Grenzfall in räumlicher Darstellung (2.32) in die klassische Form des REYNOLDSSchen Transporttheorems überführt werden:

$$\frac{dG}{dt} = \int_{\Omega_y} \left. \frac{\partial \tilde{g}}{\partial t} \right|_{\mathbf{y}} d\Omega_y + \oint_{\partial\Omega_y} (\mathbf{w} \cdot \mathbf{n} \tilde{g}) d\Gamma_y \quad \text{in } \Omega_y \quad (2.33)$$

bzw.

$$\frac{dG}{dt} = \int_{\Omega_x} \left. \frac{\partial g}{\partial t} \right|_{\mathbf{x}} d\Omega_x + \oint_{\partial\Omega_x} (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n} g) d\Gamma_x \quad \text{in } \Omega_x. \quad (2.34)$$

In beiden Darstellungen stellt der erste Term die zeitliche Änderung der physikalischen Eigenschaft innerhalb des jeweiligen Gebietes dar, während der zweite Term die Veränderung infolge des Flusses über den Gebietsrand angibt. Dabei hängt im Rahmen der ALE-Betrachtungsweise in Gleichung (2.33) der Fluss von der relativen Geschwindigkeit der Partikel \mathbf{w} im Beobachtersystem ab, wobei er in Gleichung (2.34) bei einem ruhenden Beobachter direkt über die Partikelgeschwindigkeit \mathbf{v} angegeben ist.

2.3 Navier-Stokes Gleichungen

Die instationären Vorgänge innerhalb einer Strömung, die der Ausdruck der zeitlichen Änderung der integralen Zustandsgrößen eines Fluidkörpers sind, können kontinuumsmechanisch mit Hilfe der Bilanzgleichungen für Masse, Linear- und Drehimpuls, kinetischer und innerer Energie sowie Entropie beschrieben werden. Sind die Fluide dichtebeständig, d.h. ist ihre Dichte ρ sowohl unabhängig von Volumen- als auch Temperaturänderungen, entkoppeln sich die Masse- und Impulsbilanz von den anderen Bilanzgleichungen und genügen allein zur Beschreibung der Strömungsvorgänge. Das sich aus der Masse- und Impulsbilanz ergebende gekoppelte nichtlineare partielle Differentialgleichungssystem führt unter Hinzunahme der kinematischen Beschreibung des Strömungsvorganges und der konstitutiven Beziehung des Fluides auf die inkompressiblen NAVIER-STOKES-Gleichungen. Für diese existieren verschiedene Möglichkeiten sowohl in der Formulierung der resultierenden Modellgleichungen als auch in der Wahl der Beschreibungsvariablen [Gre91, Gre00]. Neben der Wahl von Dichte ρ und Impulsdichte $\rho \mathbf{v}$ hat sich im Zusammenhang mit Finite-Elemente-Berechnungen die Verwendung der primären Variablen ρ und Geschwindigkeit \mathbf{v} in Kombination mit der Divergenzformulierung des Spannungstensors $\nabla \cdot \mathbf{T}$ als besonders geeignet gezeigt [Gre00, Don03, Fer08].

2.3.1 Bilanzgleichungen

Unter Verwendung des in Abschnitt 2.2.3 entwickelten REYNOLDSSchen Transporttheorems als Grundlage zur Herleitung sämtlicher Bilanzgleichungen können die Masse- und die Impulsbilanz sowohl in ALE- als auch in EULERScher Betrachtungsweise hergeleitet werden [Bru95, Wal99, Kno10, Don03]. Dabei erfolgt die Darstellung auf dem Raumgebiet Ω_x , da dies das Gebiet ist, in dem der Strömungsvorgang stattfindet, und damit die dort definierten Beschreibungsvariablen Gegenstand einer numerischen Berechnung sind.

Masse. Unter der Annahme, dass ein sich frei im Raum bewegendes abgeschlossenes Fluidkörper \mathcal{B}_t weder Massequellen noch -senken besitzt, ist seine Masse m eine Erhaltungsgröße und es gilt

$$\frac{dm}{dt} = \frac{d}{dt} \int_{V(t)} \rho \, dV = 0. \quad (2.35)$$

Mit $G = m$ und $g = \rho$ folgt aus Gleichung (2.31) die Massebilanz im Rahmen einer ALE-Betrachtungsweise in räumlicher Darstellung zu

$$\left. \frac{\partial \tilde{\rho}}{\partial t} \right|_{\mathbf{y}} + \mathbf{c} \cdot \nabla_{\mathbf{x}} \rho + \rho \nabla_{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{v} = 0 \quad \text{in } \Omega_x, \quad (2.36)$$

wobei die Voraussetzung der hinreichenden Stetigkeit sämtlicher Variablen die Beliebigkeit des Integrationsvolumens impliziert, so dass die in Gleichung (2.31) global formulierte Bilanz auch an jedem Punkt gelten muss und damit der Übergang auf die in Gleichung (2.36) lokale Formulierung möglich wird. Aus ihr lässt sich bei einem ruhenden Beobachter mit $\mathbf{v}_o = \mathbf{0}$ und damit $\mathbf{c} = \mathbf{v}$ unter Verwendung von Gleichung (2.17) die zugehörige lokale Erhaltungsgleichung

für die Masse in der EULERSchen Betrachtungsweise ableiten:

$$\left. \frac{\partial \rho}{\partial t} \right|_{\mathbf{x}} + \nabla_{\mathbf{x}} \cdot (\rho \mathbf{v}) = 0 \quad \text{in } \Omega_x . \quad (2.37)$$

Beim Vergleich der Erhaltungsgleichungen in ALE-Betrachtungsweise (2.36) und EULERScher Betrachtungsweise (2.37) wird die Auswirkung des sich bewegenden Beobachters in der Gleichungsgestalt sichtbar. Die Bilanz der ALE-Betrachtungsweise enthält zusätzlich im zweiten Term den konvektiven Einfluss, der sich aus der Relativbewegung zwischen den Partikeln und dem Beobachter ergibt. Ist das Fluid mit $\rho|_{\mathbf{z}} = \text{const.}$ dichtebeständig und die Strömung einphasig, so geht die Erhaltungsgleichung der Masse in der EULERSchen Betrachtungsweise (2.37) in die klassische Forderung der Divergenzfreiheit des Strömungsfeldes über,

$$\nabla_{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{v} = 0 \quad \text{in } \Omega_x , \quad (2.38)$$

die als kinematische Nebenbedingung an das Geschwindigkeitsfeld \mathbf{v} aufgefasst werden kann.

Impuls. Neben der Massebilanz wird zur Beschreibung der Strömungsvorgänge eines Körpers \mathcal{B}_t die Impulsbilanz benötigt, in der die zeitliche Änderung des Impulses \mathbf{I} als Bewegungsgröße betrachtet wird:

$$\frac{d\mathbf{I}}{dt} = \frac{d}{dt} \int_{V(t)} \rho \mathbf{v} dV = \int_{\partial V(t)} \mathbf{t} d\Gamma + \int_{V(t)} \mathbf{f} dV . \quad (2.39)$$

Dabei wird der Impuls \mathbf{I} sowohl von den Oberflächenkräften, die aus der Integration des Spannungsvektors \mathbf{t} über den Rand ∂V des Körpers \mathcal{B}_t entstehen, als auch von den im Vektor \mathbf{f} zusammengefassten Volumenkräften als äußeren Kräften beeinflusst. Mit $G = \mathbf{I}$ und $g = \rho \mathbf{v}$ folgt aus Gleichung (2.31) im Rahmen einer ALE-Betrachtungsweise die lokale Impulsbilanz in räumlicher Darstellung:

$$\left. \frac{\partial (\tilde{\rho} \tilde{\mathbf{v}})}{\partial t} \right|_{\mathbf{y}} + \mathbf{c} \cdot \nabla_{\mathbf{x}} (\rho \mathbf{v}) + (\rho \mathbf{v}) (\nabla_{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{v}) = \nabla_{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{T} + \mathbf{f} \quad \text{in } \Omega_x . \quad (2.40)$$

Im Zuge der Herleitung ist der Spannungsvektor \mathbf{t} mit Hilfe des CAUCHY-Theorems $\mathbf{t} = \mathbf{T} \cdot \mathbf{n}$ in den CAUCHY-Spannungstensor \mathbf{T} überführt worden, der die Kräfte der Momentankonfiguration B_t auf die Flächen in derselben Konfiguration bezieht. Nachfolgend konnte der Term der Oberflächenkräfte unter Anwendung des GAUSSschen Integralsatzes in ein Volumenintegral umgewandelt werden, so dass die Impulsbilanz sowohl für den gesamten betrachteten Körper als auch punktweise Gültigkeit besitzt. Die lokale Impulsbilanz (2.40) kann unter Verwendung der Massebilanz (2.36) in ihre nicht-konservative Formulierung überführt werden:

$$\tilde{\rho} \left. \frac{\partial \tilde{\mathbf{v}}}{\partial t} \right|_{\mathbf{y}} + (\mathbf{c} \rho) \cdot \nabla_{\mathbf{x}} \mathbf{v} = \nabla_{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{T} + \mathbf{f} \quad \text{in } \Omega_x . \quad (2.41)$$

Sowohl in der konservativen als auch in der nicht-konservativen Formulierung (2.40) bzw. (2.41) wird anhand des die konvektive ALE-Geschwindigkeit \mathbf{c} enthaltenden Terms der Einfluss des sich im Raum bewegenden Beobachters auf die beobachteten Strömungsvorgänge und

damit die Gestalt der Bilanzgleichung erkennbar. Analog zum Vorgehen bei der Herleitung der Massebilanz lassen sich aus den in der ALE-Betrachtungsweise formulierten Bilanzen für den Impuls im Übergang zu einem sich nicht bewegenden Beobachter mit $\mathbf{v}_o = \mathbf{0}$ und damit $\mathbf{c} = \mathbf{v}$ die entsprechenden Formulierungen in der EULERSchen Betrachtungsweise gewinnen. Unter Anwendung von Gleichung (2.17) geht die ALE-Betrachtungsweise in die klassische ortsfeste Betrachtungsweise der Strömungsmechanik über, wodurch für die konservative Formulierung der Impulsbilanz folgt

$$\left. \frac{\partial (\rho \mathbf{v})}{\partial t} \right|_{\mathbf{x}} + \nabla_{\mathbf{x}} \cdot ((\rho \mathbf{v}) \otimes \mathbf{v}) = \nabla_{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{T} + \mathbf{f} \quad \text{in } \Omega_x, \quad (2.42)$$

während sich die nicht-konservative Formulierung ergibt zu:

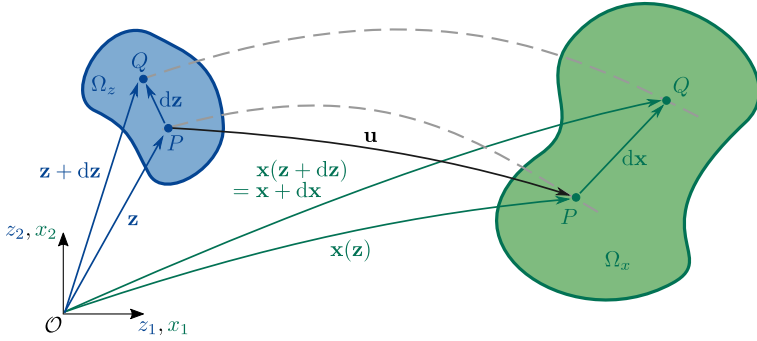
$$\rho \left[\left. \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} \right|_{\mathbf{x}} + \mathbf{v} \cdot \nabla_{\mathbf{x}} \mathbf{v} \right] = \nabla_{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{T} + \mathbf{f} \quad \text{in } \Omega_x. \quad (2.43)$$

Dabei dient im Kontext von Finite-Elemente-Berechnungen in der Regel die nicht-konservative Formulierung (2.43) als Ausgangspunkt für die numerische Umsetzung. In ihr zeigt sich der aus der ortsfesten Betrachtung folgende konvektive Charakter von Strömungen im nichtlinearen Term $\mathbf{v} \cdot \nabla_{\mathbf{x}} \mathbf{v}$, der zusammen mit der partiellen Zeitableitung die materielle Zeitableitung des Geschwindigkeitsvektors \mathbf{v} darstellt.

Neben der Betrachtung der zeitlichen Änderung des Impulses \mathbf{I} folgt aus der Bilanz für den Drehimpuls \mathbf{L} mit $g = \rho (\mathbf{r} \times \mathbf{v})$ die Gleichheit zugeordneter Schubspannungen T_{ij} , so dass der CAUCHY-Spannungstensor symmetrisch wird: $\mathbf{T} = \mathbf{T}^T$. Infolge der vorausgesetzten Dichtebeständigkeit des betrachteten Fluides haben sich die Bilanzgleichungen von Masse, Impuls und Drehimpuls von der Energie- und Entropiebilanz entkoppelt, so dass diese im Rahmen dieser Arbeit nicht weiter betrachtet werden.

2.3.2 Primäre Variablenformulierung

Aufgrund des in dieser Arbeit zur Anwendung kommenden Raum-Zeit-Finite-Elemente-Verfahrens erfolgt die Berücksichtigung eines sich in der Zeit verändernden Strömungsgebietes und des damit notwendigerweise verbundenen sich bewegenden Beobachters implizit im Rahmen der in Kapitel 3 vorgestellten Diskretisierung. Die in Abschnitt 3.4 vorgenommene Kennzeichnung von Raum-Zeit-Finite-Elemente-Verfahren als volldiskreter Untermenge von ALE-Verfahren ermöglicht, dass die Grund- und Modellgleichungen in der zur Abbildung von strömungsmechanischen Vorgängen charakteristischen EULERSchen Betrachtungsweise formuliert werden können. Neben den in Abschnitt 2.3.1 zusammengestellten Bilanzgleichungen für Masse (2.37) bzw. (2.38) und Impuls (2.42) werden zur Beschreibung der Strömungsvorgänge dichtebeständiger Fluide noch die kinematische Bewegungsbeschreibung sowie die das Spannungs- und Verzerrungsfeld verknüpfende konstitutive Beziehung zur Schließung des Gleichungssatzes benötigt. Die Zusammenfassung der Grundgleichungen bestehend aus den Bilanzsätzen für Masse und Impuls, der Kinematik und der konstitutiven Beziehung führt dann auf die inkompressiblen NAVIER-STOKES-Gleichungen als Modellgleichungen für instationäre, dichtebeständige Fluidströmungen in den primären Variablen Geschwindigkeit \mathbf{v} und Druck p .


 Abb. 2.2: Kinematik des Bewegungsvorganges eines Fluidkörpers \mathcal{B}

Kinematik

Bewegung. Das Bewegungs- und Verformungsverhalten eines materiellen Fluidkörpers \mathcal{B} wird anhand der Positionsänderung der zugehörigen Partikel \mathcal{P} beschrieben [Ari89, Tru08, Spu07]. Dabei führt die Betrachtung der zeitlichen Längenänderung eines Linienelementes dx , das zwei benachbarte Punkte P und Q verknüpft, zur Ermittlung des strömungsmechanischen Verzerrungstensors \mathbf{D} , der kinematisch mit dem Geschwindigkeitsfeld \mathbf{v} verknüpft ist. In Abbildung 2.2 ist der Bewegungsvorgang eines Fluidkörpers \mathcal{B} in den zwei Konfigurationen \mathcal{B}_{t_0} und \mathcal{B}_t dargestellt. Dabei stellt die Konfiguration \mathcal{B}_{t_0} das materielle Gebiet Ω_z dar, das auch als Ausgangskonfiguration des Bewegungsvorganges zum Zeitpunkt t_0 aufgefasst werden kann und in dem die Partikel anhand der materiellen Koordinaten \mathbf{z} gekennzeichnet sind. Demgegenüber belegt die momentane Konfiguration \mathcal{B}_t zum Zeitpunkt t das räumliche Gebiet Ω_x mit seinen Koordinaten \mathbf{x} . Die in diesem Gebiet messbaren physikalischen Größen sind Eigenschaften der über ihre Ortsvektoren der Ausgangskonfiguration \mathbf{z} gekennzeichneten Partikel, so dass u.a. für die aktuelle Partikelposition und ihre Verschiebung von der Ausgangs- in die Momentankonfiguration gilt

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}(\mathbf{z}, t) \quad (2.44) \quad \mathbf{u} = \mathbf{x} - \mathbf{z} \quad (2.45)$$

Anhand der zeitlichen Änderung des Ortsvektors bzw. der Verschiebung folgt die momentane Partikelgeschwindigkeit \mathbf{v} und ihre Beschleunigung \mathbf{a} :

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{x}}{dt} = \frac{d\mathbf{u}}{dt} \quad \text{und} \quad \mathbf{a} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} . \quad (2.46)$$

Deformation. Unter Ausnutzung der geforderten Stetigkeit der kontinuumsmechanischen Abbildungen lässt sich die momentane Position \mathbf{x} eines zum Partikel P benachbarten Partikels Q unter Verwendung einer TAYLOR-Reihenentwicklung angeben:

$$\mathbf{x}(\mathbf{z} + d\mathbf{z}, t) = \mathbf{x}(\mathbf{z}, t) + d\mathbf{x} \quad \text{mit} \quad d\mathbf{x} = \mathbf{F} d\mathbf{z} \quad \text{und} \quad \mathbf{F} = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{z}} . \quad (2.47)$$

Dabei tritt der Deformationsgradient \mathbf{F} in Erscheinung, der den vollständigen Bewegungsvorgang von der Ausgangs- in die Momentankonfiguration erfasst und dadurch sowohl Starrkörperbewegungen als auch gegenseitige Lageänderungen der Partikel beinhaltet. Er überführt als Zweifeldtensor die Linienelemente der Ausgangskonfiguration $d\mathbf{z}$ in ihre momentane Konfiguration $d\mathbf{x}$. Analog ergibt sich für die Geschwindigkeit:

$$\mathbf{v}(\mathbf{x} + d\mathbf{x}, t) = \mathbf{v}(\mathbf{x}, t) + d\mathbf{v} \quad \text{mit} \quad d\mathbf{v} = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \mathbf{x}} d\mathbf{x} . \quad (2.48)$$

Hierbei kommt der Deformationsgeschwindigkeitsgradient \mathbf{L} zur Anwendung, der die zeitliche Änderung der differentiellen Linienelemente in Bezug auf die Momentankonfiguration angibt. Er lässt sich in einen symmetrischen Anteil \mathbf{D} und einen antisymmetrischen Anteil \mathbf{R} aufspalten:

$$\begin{aligned} \mathbf{L} &= \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \mathbf{x}} = [\nabla_{\mathbf{x}} \mathbf{v}]^T \\ &= \frac{1}{2} [\mathbf{L} + \mathbf{L}^T] + \frac{1}{2} [\mathbf{L} - \mathbf{L}^T] \end{aligned} \quad (2.49)$$

$$\mathbf{L} = \mathbf{D} + \mathbf{R} .$$

Dabei wird der symmetrische Anteil \mathbf{D} als Dehnungsgeschwindigkeitstensor oder auch als strömungsmechanischer Verzerrungstensor bezeichnet, während der antisymmetrische Anteil \mathbf{R} der Drehgeschwindigkeitstensor ist. Die additive Aufspaltung des Deformationsgeschwindigkeitsgradienten \mathbf{L} ermöglicht die Darstellung der Strömungsgeschwindigkeit als

$$\mathbf{v}(\mathbf{x} + d\mathbf{x}, t) = \mathbf{v}(\mathbf{x}, t) + \mathbf{D} d\mathbf{x} + \mathbf{R} d\mathbf{x} \quad (2.50)$$

und führt auf die CAUCHY-STOKESSche Darstellung des Bewegungsvorganges in den drei grundlegenden Anteilen Verschiebung, Verzerrung und Rotation. Hierbei sind sämtliche Verzerrungen als Änderungsraten von Längen und Winkeln materieller Linienelemente im Dehnungsgeschwindigkeitstensor \mathbf{D} enthalten, während die nicht zu Verzerrungen führenden Starrkörperdrehungen der Linienelemente im Drehgeschwindigkeitstensor \mathbf{R} zusammengefasst sind.

Verzerrung. Die innere Beanspruchung des materiellen Fluidkörpers wird hervorgerufen von der Veränderungsrate der materiellen Linienelemente $d\mathbf{x}$, deren Länge in der Momentankonfiguration $ds = \|d\mathbf{x}\|$ ist. Die zeitliche Längenänderung ergibt sich dabei unter Verwendung von Gleichung (2.49) zu

$$\frac{d(ds)}{dt} = \dot{ds} = d\mathbf{v} \frac{d\mathbf{x}}{ds} = \frac{d\mathbf{x}}{ds} \mathbf{L} d\mathbf{x} , \quad (2.51)$$

wobei $d\mathbf{x}/ds$ den Einheitsvektor in Richtung des differentiellen Linienelementes $d\mathbf{x}$ angibt. Der Bezug auf die momentane Länge führt dann auf

$$\frac{\dot{ds}}{ds} = \frac{d\mathbf{x}}{ds} \mathbf{L} \frac{d\mathbf{x}}{ds} = \frac{d\mathbf{x}}{ds} \mathbf{D} \frac{d\mathbf{x}}{ds} + \frac{d\mathbf{x}}{ds} \mathbf{R} \frac{d\mathbf{x}}{ds} . \quad (2.52)$$

Hierbei liefern die in \mathbf{R} enthaltenen Starrkörperdrehungen keinen Beitrag zur Längenänderung des Linienelementes, so dass $\mathbf{dx} \mathbf{R} \mathbf{dx} = 0$ ist, was auch durch Ausmultiplikation gezeigt werden kann. Damit ergibt sich für die zeitliche Längenänderung der Linienelemente in der Momentankonfiguration

$$\frac{\dot{ds}}{ds} = \frac{d\mathbf{x}}{ds} \mathbf{D} \frac{d\mathbf{x}}{ds} \quad \text{mit} \quad \mathbf{D} = \frac{1}{2} \left[\nabla_{\mathbf{x}} \mathbf{v} + (\nabla_{\mathbf{x}} \mathbf{v})^T \right], \quad (2.53)$$

womit das Verzerrungsmaß allein der den Zusammenhang zum Geschwindigkeitsfeld herstellen- de Dehnungsgeschwindigkeitstensor \mathbf{D} ist. Die Hauptdiagonalelemente D_{ii} des strömungsme- chanischen Verzerrungstensors \mathbf{D} repräsentieren die Dehnungsgeschwindigkeiten der Linienele- mente in Richtung der Koordinatenachsen, während die Nebendiagonalelemente D_{ij} die Sche- rungsgeschwindigkeiten angeben, die die Winkeländerungsgeschwindigkeit zweier ursprünglich achsparalleler Linienelemente quantifiziert. Gegenüber den der LAGRANGESchen Betrachtungs- weise geschuldeten nichtlinearen GREEN-LAGRANGESchen- bzw. EULER-ALMANSISchen Ver- zerrungstensoren der Festkörpermechanik führt die EULERSche Betrachtungsweise der Fluid- mechanik auf den in den Geschwindigkeiten \mathbf{v} linearen Verzerrungstensor \mathbf{D} . Die Linearität lässt neben der Superposition bekannter Geschwindigkeitsfelder zur Konstruktion neuer Strö- mungszustände auch die additive Zerlegung betrachteter Verzerrungszustände in bekannte Dehnungsgeschwindigkeitstensoren zu.

Konstitutive Beziehung

Die konstitutiven Beziehungen verknüpfen das Spannungsfeld \mathbf{T} mit dem Verzerrungsfeld \mathbf{L} bzw. \mathbf{D} , indem sie materialabhängige Aussagen zum Verhalten des Fluides beim Auftreten von äußeren Lasten bereitstellen und damit den Gleichungssatz schließen und prinzipiell integrier- bar machen. Neben der sehr aufwendigen deduktiven Entwicklung dieser materialabhängigen Aussagen bietet sich das induktive Vorgehen an, bei dem an einfachen experimentellen Un- tersuchungen gemachte Erkenntnisse unter Berücksichtigung thermodynamischer Zusammen- hänge verallgemeinert werden [Alt12]. Bei tropfbaren Fluiden ist dies neben dem einaxialen Scherversuch, der zur Entwicklung des NEWTONSchen Materialgesetzes für Fluide geführt hat, die Betrachtung des hydrostatischen Spannungszustandes eines in Ruhe verharrenden Fluides. Die nachfolgenden Ausführungen zur Herleitung der konstitutiven Beziehung NEWTONScher Fluide beruhen auf [Tru08, Bat00, Oli17, Hut03, Ger92, Sch06, Spu07].

Hydrostatischer Zustand. Bei einem in Ruhe verharrendem Fluid treten keine Schub- spannungen auf, $T_{ij} = 0$, und die Normalspannungen T_{ii} sind unabhängig von der Nor- malenrichtung der betrachteten Schnittfläche. Jedes Achsensystem ist gleichzeitig Hauptach- sensystem, womit ein isotroper Spannungszustand vorliegt und der Spannungstensor \mathbf{T} eine sphärische Form annimmt, in der der am jeweiligen Punkt vorliegende Druck p die Hauptdia- gonalelemente des Spannungstensors besetzt:

$$\mathbf{T} = -p \mathbf{I} \quad \text{mit} \quad p = p_0 = \bar{p} \quad \text{und} \quad \bar{p} = -\frac{1}{3} \text{tr}(\mathbf{T}) = -\bar{T}. \quad (2.54)$$

Dabei entspricht im hydrostatischen Zustand der prinzipiell thermodynamisch definierte Druck p sowohl dem hydrostatischen Druck p_0 als auch dem mechanischen Druck \bar{p} , der als negative mittlere Normalspannung \bar{T} über die Spur des Spannungstensors eine spannungsbasierte Darstellung des Druckes ermöglicht. Das im Ruhezustand beobachtete Fluidverhalten motiviert die allgemeine Aufteilung des Spannungstensors in einen sphärischen und einen deviatorischen Anteil:

$$\mathbf{T} = \mathbf{T}_{\text{sph}} + \mathbf{T}_{\text{dev}} = -\bar{p}\mathbf{I} + \mathbf{S} . \quad (2.55)$$

Dabei beinhaltet der sphärische Anteil $\mathbf{T}_{\text{sph}} = -\bar{p}\mathbf{I}$ den mit dem mechanischen Druck \bar{p} als Invariante des Spannungstensors \mathbf{T} dargestellten hydrostatischen Zustand, während der deviatorische Anteil $\mathbf{T}_{\text{dev}} = \mathbf{S}$ die Spannungsanteile umfasst, die infolge der strömenden Bewegung der Fluidpartikel entstehen.

Materialbeschreibung. Als Ausgangspunkt zur Entwicklung einer konstitutiven Beziehung, die das Fluidverhalten bei strömender Bewegung beschreibt, wird der Spannungstensor \mathbf{T} im Rückgriff auf Gleichung (2.55) in einen sphärischen Anteil zur Abbildung des Ruhezustandes und einen deviatorischen Anteil für den Bewegungszustand aufgeteilt:

$$\mathbf{T} = -p\mathbf{I} + \mathbf{S} . \quad (2.56)$$

Dabei wird jedoch im Hinblick auf die Verknüpfung mit dem thermodynamisch begründeten Materialverhalten statt dem mechanischen Druck \bar{p} der thermodynamische Druck p verwendet. Im Ruhezustand geht dann nach Gleichung (2.54) der thermodynamische Druck p in den mechanischen Druck \bar{p} über, so dass sich die unterschiedliche Wahl des Druckbegriffes in (2.55) und (2.56) nicht auswirkt und der hydrostatische Spannungszustand unabhängig von der verwendeten Druckdefinition stets mit dem sphärischen Anteil \mathbf{T}_{sph} beschrieben ist. Infolge der additiven Aufspaltung des Spannungstensors \mathbf{T} machen sich die aus dem Bewegungsvorgang entstehenden Spannungen nur noch im deviatorischen Spannungstensor \mathbf{S} bemerkbar. Unter der Voraussetzung, dass die die Spannung hervorrufende Größe lediglich lokale Wirkung besitzen darf, bietet sich im Rahmen einer phänomenologischen Beschreibung, die keinen Rückgriff auf die molekular bedingte innere Fluidreibung macht, der Deformationsgeschwindigkeitsgradient \mathbf{L} zur Angabe der lokalen Wirkung des Geschwindigkeitsfeldes an. Unter der Annahme, dass es neben dem Deformationsgeschwindigkeitsgradienten \mathbf{L} keinen weiteren wesentlichen Parameter gibt, der zu deviatorischen Spannungen führt, folgt unter Verwendung von Gleichung (2.49) und mit Hilfe des vierstufigen Materialtensors \mathcal{C} die Beschreibung des Zusammenhanges der aus dem Geschwindigkeitsfeld hervorgerufenen deviatorischen Spannungen als

$$\mathbf{S} = \mathcal{C} : \mathbf{L} = \mathcal{C} : \mathbf{D} + \mathcal{C} : \mathbf{R} . \quad (2.57)$$

Dieser geht bei einem isotropen Fluid infolge $\mathcal{C} : \mathbf{R} = \mathbf{0}$ über in

$$\mathbf{S} = \mathcal{C} : \mathbf{D} \quad (2.58)$$

und zeigt damit, dass lediglich die im Dehnungsgeschwindigkeitstensor \mathbf{D} enthaltenen Dehnungs- und Scherungsanteile spannungserzeugend sind, während sowohl reine Translationsbewegungen als auch die mit dem Drehgeschwindigkeitstensor \mathbf{R} beschriebenen Starrkörperdrehungen keine Spannungen hervorrufen. Unter Annahme eines linearen Zusammenhanges

zwischen Spannungen und Verzerrungsgeschwindigkeiten besitzt der Materialtensor mit den Materialparametern λ und μ sowie dem vierstufigen Einheitstensor \mathcal{I} die Gestalt

$$\mathbf{C} = \lambda \mathbf{I} \otimes \mathbf{I} + 2\mu \mathcal{I}, \quad (2.59)$$

so dass sich unter Verwendung von (2.58) und (2.55) das CAUCHY-POISSON-Gesetz als allgemeine konstitutive Beziehung ergibt:

$$\mathbf{T} = -p\mathbf{I} + \lambda \operatorname{tr}(\mathbf{D}) \mathbf{I} + 2\mu \mathbf{D}. \quad (2.60)$$

In ihm zeigt sich, dass die Annahme eines linearen Zusammenhanges sämtliche Verformungsanteile vollständig beschreiben kann. So steht in Gleichung (2.60) der Materialparameter λ unter Berücksichtigung von $\operatorname{tr}(\mathbf{D}) = \nabla \cdot \mathbf{v}$ im Zusammenhang mit einer isotropen Volumenänderung, während die Anteile des letzten Terms in den deviatorischen Normalspannungen S_{ii} mit axialen Dehnungen und in den Schubspannungen S_{ij} mit Winkeländerungen der differentiellen Fluidelemente in Verbindung gebracht werden können. Im Zusammenhang mit dem einaxialen Scherversuch geht Gleichung (2.60) in den bereits von NEWTON hergeleiteten linearen Zusammenhang zwischen Schubspannungen und Scherungsgeschwindigkeit über und es zeigt sich, dass der Materialparameter μ mit der bekannten Scherviskosität, die auch als dynamische Viskosität bezeichnet wird, identifizierbar ist.

NEWTONSche Flüssigkeiten. Zur Herstellung des Zusammenhanges zwischen dem in Gleichung (2.60) materialbezogen definierten und dem in Gleichung (2.54) mechanisch aufgespaltenen Spannungstensor \mathbf{T} ist die mittlere Normalspannung \bar{T} zu bilden, so dass sich zwischen dem thermodynamischen Druck p und dem mechanischen Druck \bar{p} bei einem strömenden Fluid folgende Beziehung ergibt:

$$p = \bar{p} + \kappa \nabla \cdot \mathbf{v} \quad \text{mit} \quad \kappa = \lambda + \frac{2}{3}\mu. \quad (2.61)$$

In ihr stellt der Materialparameter κ die Kompressionsviskosität dar, die alternativ für den Materialparameter λ verwendet werden kann. Aus Gleichung (2.61) wird ersichtlich, dass bei verschwindender Kompressionsviskosität oder Dichtebeständigkeit des Fluides keine Unterscheidung zwischen dem thermodynamischen und dem mechanischen Druck notwendig ist. Unter Verwendung von (2.61) und (2.60) lässt sich Gleichung (2.55) damit schreiben als

$$\mathbf{T} = -p\mathbf{I} + \kappa \operatorname{tr}(\mathbf{D}) \mathbf{I} + 2\mu \left[\mathbf{D} - \frac{1}{3} \operatorname{tr}(\mathbf{D}) \mathbf{I} \right]. \quad (2.62)$$

In dieser Darstellung sind die Einflüsse aus einer Volumenkompression eindeutig mit dem zweiten Term identifizierbar und werden von der Kompressionsviskosität κ als Materialeigenschaft beeinflusst, während die Auswirkungen bei Gestaltänderung über die Scherviskosität μ spannungserzeugend wirken. In der Regel nimmt die Kompressionsviskosität nur für spezielle Materialien wie Polymere oder gummiartige Flüssigkeiten nicht verschwindende Werte an, so dass für die meisten Gase und Flüssigkeiten die STOKESsche Hypothese mit $\kappa = 0$ zutreffend ist. Ist das Fluid zusätzlich noch dichtebeständig, d.h. $\operatorname{tr}(\mathbf{D}) = 0$, so folgt die konstitutive Beziehung für NEWTONSche Flüssigkeiten

$$\mathbf{T} = -p\mathbf{I} + 2\mu \mathbf{D}, \quad (2.63)$$

in der die aus dem Bewegungsvorgang resultierenden deviatorischen Spannungen \mathbf{S} linear über die dynamische Viskosität μ vom Dehnungsgeschwindigkeitsgradienten \mathbf{D} abhängen und der sphärische Anteil über den mit dem mechanischen Druck \bar{p} identischen thermodynamischen Druck p gegeben ist.

Modellgleichungen

Primäre Variablen. Unter Verwendung der Massebilanz (2.38) sowie der Impulsbilanz (2.43) in Verbindung mit der kinematischen und der konstitutiven Beziehung (2.53) bzw. (2.63) folgen die inkompressiblen NAVIER-STOKES-Gleichungen als Modellgleichungen zur Beschreibung des instationären Strömungsverhaltens dichtebeständiger, viskoser Fluide:

$$\rho \left[\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} \Big|_{\mathbf{x}} + \mathbf{v} \cdot \nabla_{\mathbf{x}} \mathbf{v} \right] - \mu \Delta_{\mathbf{x}} \mathbf{v} + \nabla_{\mathbf{x}} p = \mathbf{f} \quad \text{in } \Omega_x, \quad (2.64a)$$

$$\nabla_{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{v} = 0 \quad \text{in } \Omega_x. \quad (2.64b)$$

Sie stellen ein gekoppeltes, nichtlineares, gemischt hyperbolisch-parabolisches, partielles Differentialgleichungssystem dar, das prinzipiell sämtliche laminaren, aber auch turbulenten Strömungsphänomene viskoser Fluide abbilden kann [Böh12, Tru08, Spu07, Dur06, Ger92, Hut03, Sch06, Gre00, Fer08]. Auch wenn ihre mathematische Behandlung zur Gewinnung einer allgemeinen Lösung gegenwärtig noch eines der sieben Milleniumsprobleme der Mathematik darstellt [Son09], so zeigen die mit Hilfe der inkompressiblen NAVIER-STOKES-Gleichungen gewonnen Lösungen im experimentellen Abgleich, dass eine sehr gute Abbildung der tatsächlichen Strömungssituation möglich ist und damit die Existenz einer eindeutigen Lösung gegeben zu sein scheint. Aufgrund der Annahme der Dichtebeständigkeit degeneriert bei den inkompressiblen NAVIER-STOKES-Gleichungen die Erhaltungsgleichung der Masse (2.64b) zu einer algebraischen Gleichung, so dass sie ein Differentialgleichungssystem mit algebraischer Nebenbedingung darstellen und damit die Lösungssuche dem Auffinden eines Sattelpunktes entspricht.

Die Kopplung der primären Variablen Geschwindigkeit \mathbf{v} und Druck p im Gleichungssystem (2.64) erfolgt implizit über den Druckgradienten $\nabla_{\mathbf{x}} p$ in der Impulsbilanz (2.64a) und der Divergenz des Geschwindigkeitsfeldes $\nabla_{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{v}$ in der Erhaltungsgleichung der Masse (2.64b). Dabei tritt der Druck p in seiner ihm zugeordneten Bestimmungsgleichung (2.64b) selbst nicht direkt auf und unterliegt auch keiner Zeitableitung. Die Druckvariable ist damit nicht direkt zeitabhängig, sondern dient dem Geschwindigkeitsfeld als zusätzlicher Freiheitsgrad, der sich zu jedem Zeitpunkt derart einstellen muss, dass das Geschwindigkeitsfeld divergenzfrei bleibt und so die Masseerhaltung (2.64b) gewährleistet ist. In der Impulsbilanz (2.64a) führt die EULERSche Betrachtungsweise zum Auftreten des konvektiven Terms $\mathbf{v} \cdot \nabla_{\mathbf{x}} \mathbf{v}$, der infolge seiner Nichtlinearität Quelle einer inhärenten Instabilität ist und damit die mathematische Ausprägung der stets zu einem turbulenten Charakter tendierenden Strömung darstellt. Der konvektive Term gibt die in einer Strömung vorherrschende gerichtete Informationsausbreitung wieder und stellt damit den hyperbolischen Anteil in der Impulsbilanz dar. Demgegenüber besitzt der lineare, viskose Term $\mu \Delta_{\mathbf{x}} \mathbf{v}$ elliptischen Charakter und kennzeichnet die diffusive Auswirkung der Fluidreibung. Gleichzeitig ist der elliptische Charakter verknüpft

mit einer allseitigen und augenblicklichen Informationsausbreitung, die als Folge der bei Dichtebeständigkeit vorliegenden unendlichen Schallgeschwindigkeit im Fluid zu einer sofortigen Ausbreitung des Druckwertes im gesamten Strömungsgebiet führt. Die in (2.64a) verwendete LAPLACE-Formulierung des Viskositätsterms eignet sich gut für theoretische Untersuchungen und dient meist als Ausgangspunkt bei der Herleitung vereinfachter Gleichungen für spezielle Strömungssituationen wie ebene Schichtenströmungen oder Rohrströmungen. Für die numerische Umsetzung hingegen ist als Ausgangspunkt die Beibehaltung der in Gleichung (2.43) vorhandenen Divergenzformulierung des Spannungstensors \mathbf{T} vorteilhafter, da die aus ihr abgeleiteten natürlichen Randbedingungen dann als Randspannungen eine eindeutige physikalisch interpretierbare Form annehmen.

Randbedingungen. Zur Berechnung eines eindeutigen Strömungs- und Druckfeldes sind für die inkompressiblen NAVIER-STOKES-Gleichungen (2.64) noch geeignete Anfangs- und Randbedingungen festzulegen. Im Hinblick auf die Randbedingungen unterteilt sich der Rand in einen DIRICHLET-Rand $\Gamma_{\mathbf{v}}$, auf dem die Geschwindigkeiten $\bar{\mathbf{v}}$ als natürliche Randbedingungen zu setzen sind, sowie einen NEUMANN-Rand $\Gamma_{\mathbf{t}}$ mit den Randspannungen $\bar{\mathbf{t}}$ als wesentlichen Randbedingungen:

$$\mathbf{v} = \bar{\mathbf{v}} \quad \text{auf} \quad \Gamma_{\mathbf{v}} \quad \text{und} \quad \mathbf{t} = \bar{\mathbf{t}} = \bar{\mathbf{T}} \cdot \mathbf{n} \quad \text{auf} \quad \Gamma_{\mathbf{t}} . \quad (2.65)$$

Die Unterteilung des Randes mit $\Gamma = \Gamma_{\mathbf{v}} \cup \Gamma_{\mathbf{t}}$ und $\Gamma_{\mathbf{v}} \cap \Gamma_{\mathbf{t}} = \emptyset$ ist hierbei eindeutig. Im Wesentlichen wird auf dem DIRICHLET-Rand $\Gamma_{\mathbf{v}}$ unterschieden zwischen einer sog. Haft- und einer Gleit-Randbedingung. Bei der Haft-Randbedingung (*slip*-Bedingung) entspricht sowohl die normale als auch die tangentielle Geschwindigkeitskomponente derjenigen Geschwindigkeit der Randpunkte, wobei diese sich in der Regel selbst nicht bewegen, so dass unmittelbar am Rand eine ruhende Strömung vorliegt und sich eine Grenzschicht ausbildet. Demgegenüber folgen die Fluidpartikel bei der Gleit-Randbedingung (*noslip*-Bedingung) nur der normalen Geschwindigkeitskomponente der Randpunkte, während sich ihre tangentielle Komponente frei einstellen und sich so keine Grenzschicht entwickeln kann. Neben diesen beiden rein geschwindigkeitsbezogenen Randbedingungen findet häufig noch die sog. Ausfluss-Randbedingung Verwendung, bei der weder Geschwindigkeits- noch Spannungsgrößen vorgeschrieben werden. Im Rahmen von numerischen Berechnungen stellt dies die implizite Festlegung einer homogenen NEUMANN-Randbedingung dar, welche aus dem Freischneiden des Berechnungsgebietes von seiner natürlichen Umgebung resultiert. Häufig gelingt es numerisch nicht, die Divergenzfreiheit am Ausflussrand vollständig zu gewährleisten, so dass hier numerische Störungen entstehen, die sich in das Strömungsgebiet ausbreiten können. Daher ist es oft notwendig, das Berechnungsgebiet wesentlich größer zu wählen, als es das eigentlich interessierende Strömungsgebiet erfordert. Neben den sich aus der Differentialgleichung ergebenden Randbedingungen ist bei Verwendung der inkompressiblen NAVIER-STOKES-Gleichungen (2.64) zusätzlich das Setzen eines Druckwertes an einem Randpunkt notwendig, um das globale Druckniveau festzulegen. In der Differentialgleichung (2.64a) ist der Druck selbst nicht direkt, sondern nur sein Gradient enthalten, so dass die Lösung der inkompressiblen NAVIER-STOKES-Gleichungen stets nur relative Druckangaben liefert und diese erst mit der Festlegung eines Bezugsniveaus in absolute Druckwerte überführt werden.

Anfangsbedingungen. Neben den Randbedingungen bedürfen die inkompressiblen NAVIER-STOKES-Gleichungen infolge ihrer Zeitabhängigkeit noch der Angabe von Anfangsbedingungen. Im Hinblick auf die Konsistenz der Anfangsbedingungen mit dem Differentialgleichungssystem (2.64) folgt, dass nur für das Geschwindigkeitsfeld \mathbf{v} , nicht jedoch für das Druckfeld p , Festlegungen zum Beginn der Berechnung zu machen sind und dass dabei das Anfangsgeschwindigkeitsfeld \mathbf{v}_0 stets divergenzfrei sein muss:

$$\nabla_{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{v}_0 = 0 \quad \text{mit} \quad \mathbf{v}_0 = \mathbf{v}(\mathbf{x}, 0) \quad \text{in} \quad \Omega_x. \quad (2.66)$$

Daneben sind nicht alle Kombinationen von Rand- und Anfangsbedingungen zulässig, sondern es dürfen nur solche gewählt werden, deren Kombination nach HADAMARD auf eine korrekt gestellte Formulierung führen, so dass die Lösung eindeutig ist und stetig von den Randbedingungen sowie der Belastung und den Materialparametern als Eingabedaten abhängt. Beim Setzen von Anfangs- und Randbedingungen ist daher stets darauf zu achten, dass diese in einem Punkt übereinstimmen, da anderenfalls die Formulierung nicht korrekt gestellt und damit die Existenz einer Lösung nicht gegeben ist. Somit ist das impulsartige, plötzliche Anfahren der Strömung im Rahmen einer numerischen Berechnung nicht zulässig ist. Möglich ist jedoch ein sehr zügiges Anfahren der Strömung, wie es auch bei experimentellen Untersuchungen anwendbar wäre.

Dimensionslose Darstellung. Mit Hilfe der Festlegung geeigneter Bezugsgrößen können die inkompressiblen NAVIER-STOKES-Gleichungen nach [Ger92] auch in einer dimensionslosen Form dargestellt werden:

$$\rho \left[\text{Str} \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} \right] + \text{Eu} \nabla p - \frac{1}{\text{Re}} \Delta \mathbf{v} = \frac{1}{\text{Fr}^2} \mathbf{g}, \quad \nabla \cdot \mathbf{v} = 0. \quad (2.67)$$

In dieser sind sämtliche Größen einheitenfrei und als Parameter treten die STROUHAL-Zahl Str und die EULER-Zahl Eu sowie REYNOLDS-Zahl Re und die FROUDE-Zahl Fr auf [Dur06, Hut03, Zie91]. Zum einen bietet die dimensionslose Darstellung (2.67) den Vorteil, dass mit ihr gewonnene Lösungen aufgrund der verwendeten dimensionslosen Kennzahlen für eine Vielzahl an physikalischen Parameterkonfigurationen Gültigkeit besitzen und damit theoretische Betrachtungen für einen breiten Anwendungsbereich gemacht werden können. Zum anderen legt die den Transformationsgesetzen der Ähnlichkeitsmechanik unterworfenen dimensionslosen Darstellung das grundlegende Verhalten der NAVIER-STOKES-Gleichungen offen und zeigt ihren Zusammenhang mit den anderen Modellgleichungen der Strömungsmechanik auf. Neben der Kennzeichnung des Umfangs des instationären Charakters der Strömung anhand der STROUHAL-Zahl, geben die EULER- und FROUDE-Zahl jeweils an, ob die Strömung vorwiegend druck- oder schwerkraftgetrieben ist. Ersteres tritt insbesondere bei Rohrströmungen auf, während letzteres die bei Freispiegelströmungen im offenen Gerinne maßgebende Antriebskraft ist. Stets vorhanden und von herausgehobener Bedeutung ist die REYNOLDS-Zahl Re , die neben der Kennzeichnung eines laminaren oder turbulenten Strömungszustandes auch den Übergang in die benachbarten Gleichungsformen der Strömungsmechanik bewirkt. Während bei verschwindender REYNOLDS-Zahl $\text{Re} \rightarrow 0$ der Einfluss der Viskosität dominiert und der Gleichungssatz (2.67) in die STOKES-Gleichungen zäher Strömungen übergeht, folgen bei sehr großen REYNOLDS-Zahlen $\text{Re} \rightarrow \infty$ die EULER-Gleichungen der Gasdynamik, in der die konvektiven Effekte die viskosen Einflüsse bei weitem überwiegen.

3 Raum-Zeit-Diskretisierung

Unter Verwendung der in Kapitel 2 zusammengestellten fluidmechanischen Grundgleichungen zur Beschreibung von 2-Phasen-Strömungen auf veränderlichen Gebieten erfolgt in diesem Kapitel ihre Diskretisierung mit Hilfe der Raum-Zeit-Finite-Elemente-Methode.

Aufbauend auf dem methodischen Vorgehen der klassischen Finite-Elemente-Methode zur rein räumlichen Diskretisierung von Differentialgleichungen werden in Abschnitt 3.1 die für eine einheitliche Behandlung von Raum- und Zeitbereich notwendigen Erweiterungen besprochen. Anschließend findet die Diskussion der Besonderheiten statt, die bei Verwendung der Finite-Elemente-Methode zur Abbildung von Strömungsvorgängen auftreten.

In Abschnitt 3.2 schließt sich die Entwicklung der schwachen Form der inkompressiblen NAVIER-STOKES-Gleichungen unter Verwendung der Raum-Zeit-Finite-Elemente-Methode und unter Hinzunahme von Stabilisierungstermen für Geschwindigkeits- und Druckfeld an. Die mit Hilfe des NEWTON-RAPHSON-Verfahrens linearisierte Elementformulierung wird anhand der Berechnung einer Nischenströmung verifiziert.

Im Hinblick auf die Abbildung von 2-Phasen-Strömungen werden in Abschnitt 3.3 sowohl explizite als auch implizite Grenzflächenauflösungsverfahren besprochen, wobei der Fokus auf der *Level-Set*-Methode als Volumenverfolgungsverfahren liegt. Die *Level-Set*-Gleichung ergänzt nach Überführung in ihre schwache Form die diskretisierten NAVIER-STOKES-Gleichungen. Anhand der Untersuchung einer Sohlschwellenüberströmung erfolgt die Verifikation.

In Abschnitt 3.4 wird schlussendlich das entwickelte Berechnungsmodell um die *Shear-Slip-Mesh-Update*-Methode als diskontinuierliches Netzbewegungsverfahren zur Berücksichtigung veränderlicher Gebiete komplettiert. Nach Vorstellung einer methodischen Erweiterung speziell für die Anwendung im Raum-Zeit-Gebiet erfolgt die Verifikation anhand eines in einem 2-Phasen-Gemisch rotierenden Starrkörpers.

3.1 Grundlagen

3.1.1 Raum-Zeit-Finite-Elemente-Methode

Allgemeines

Viele physikalische und insbesondere mechanische Vorgänge in Natur und Technik können mittels partieller Differentialgleichungen beschrieben werden. Neben dem Bewegungs- und Verzerrungsverhalten von Festkörpern mit reversiblen und irreversiblen Verformungsverhalten beschreiben die in Abschnitt 2.3 aus den Grundgleichungen von Kinematik und konstitutiver Beziehung sowie den Bilanzen von Masse und Impuls abgeleiteten NAVIER-STOKES-Gleichungen (2.64) das Strömungsverhalten inkompressibler, viskoser Fluide.

Im Allgemeinen sind in der Strukturmechanik nur für Spezialfälle der Modellgleichungen nach LAMÉ-NAVIER oder BELTRAMI-MITCHELL analytische Lösungen in geschlossener Form bekannt. Bereits für die Scheibengleichung mit AIRYScher Spannungsfunktion ist bisher keine Fundamentallösung gefunden worden. Die schon in der Strukturmechanik vorhandenen Schwierigkeiten bei der Suche nach analytischen Lösungen setzt sich in der Strömungsmechanik in erweitertem Umfang fort. Existieren dort mit Dehnstab, Balken sowie Scheiben, Platten und Schalen für eine Vielzahl an technischen Anwendungsfällen vereinfachte Modelle, die unter Ansatz geeigneter Randbedingung in der Regel geschlossen lösbar sind, so beschränken sich in der Fluidmechanik die praxisnahen Vereinfachungen auf Strömungen in Rohren oder ebenen Schichten. Bereits bei zweidimensionalen Strömungen ist die Wahl der anzusetzenden Rand- und Anfangsbedingungen erheblich eingeschränkt, wenn eine analytische Lösung angestrebt wird.

Allgemein kann daher sowohl in der Struktur- als auch in der Fluidmechanik die Suche nach geschlossenen Lösungen für beliebige Bewegungsvorgänge, insbesondere bei komplexen Geometrien, als »hoffnungslos« eingeschätzt werden [Sch87]. In der Regel ist jedoch anstatt einer exakten Lösung auch eine Näherungslösung ausreichend.

Zur Gewinnung von genäherten Lösungen haben sich daher im Zuge der Entwicklung der Computertechnik seit den 1950er Jahren verschiedene numerische Berechnungsverfahren etabliert. Neben der Finiten-Differenzen-Methode (FDM), der eine grundlegende Bedeutung bei der Berechnung sowohl im Raum- als auch im Zeitbereich zukommt, sind dies die Finite-Volumen-Methode (FVM) und die Finite-Elemente-Methode (FEM). Während die Finite-Volumen-Methode vorwiegend zur Berechnung von Strömungsvorgängen eingesetzt wird, hat die Finite-Elemente-Methode zwar ihren Ausgangspunkt in der Strukturmechanik, konnte sich jedoch, wie in Anhang A.2 im Rahmen einer kurzen Zusammenstellung der geschichtlichen Entwicklung der FEM beschrieben, seit den 1970er Jahren auch erfolgreich im Bereich der Fluidmechanik etablieren [Bat02, Zie13, Zie14a, Zie14b, Fer08].

Darüber hinaus existieren für spezielle Anwendungsgebiete neben den netzfreien Verfahren u.a. noch die Lattice-Boltzmann-Methode und verschiedene Partikelmethoden, wie z.B. das Smoothed-Particle-Hydrodynamics-Verfahren (SPH-Verfahren), die der makroskopischen Sichtweise von FVM und FEM eine Partikelbetrachtung entgegensetzen.

Finite-Elemente-Methode

Ausgangspunkt der in der Kontinuumsmechanik angewendeten Finite-Elemente-Methode sind die kinematischen und konstitutiven Beziehungen sowie die Bilanzgleichungen gemeinsam mit den zugehörigen Rand- und Anfangsbedingungen als residuell formulierte Grundgleichungen. Neben dem Rückgriff auf ein Variationsprinzip nach RITZ oder die Anwendung eines Arbeits- bzw. Leistungsprinzips wie des in der Elastodynamik stark verbreiteten Prinzips der virtuellen Verschiebungen (vgl. z.B. [Arg86] oder [Din13]) ist die Methode der gewichteten Residuen stets anwendbar zur Konstruktion einer schwachen Form [Sch72]. Dies ist insbesondere vorteilhaft bei numerischen Strömungsberechnungen auf Grundlage der NAVIER-STOKES-Gleichungen (2.64), da hierbei weder ein Potential infolge der Reibung vorhanden ist, noch die Anwendung eines Arbeits- bzw. Leistungsprinzips für alle Terme unmittelbar zu physikalisch plausiblen Interpretationen führt. Die residuell hergeleitete schwache Form stellt dann den Ausgangspunkt zur Entwicklung einer Näherungslösung dar, wobei die Zusammenhänge zwischen aufeinander einwirkenden Test- und Zustandsvariablen sich teilweise anhand ihrer Stellung im zugehörigen variationellen Leistungsprinzip physikalisch deuten lassen [Bat02, Don03, Red05, Zie14b].

Ausgehend von der Wahl der von der Näherungslösung exakt zu erfüllenden Residuen lassen sich unterschiedliche schwache Formulierungen herleiten. Für die Entwicklung der schwachen Form in primären Variablen, die in der Strukturmechanik den LAMÉ-NAVIERschen Gleichungen und in der Strömungsmechanik den NAVIER-STOKES-Gleichungen äquivalent ist, wird die exakte Erfüllung von kinematischer und konstitutiver Beziehung gefordert, während die Bilanzgleichungen lediglich im integralen Mittel von der Näherungslösung einzuhalten sind. Zusätzlich ist die exakte Berücksichtigung der DIRICHLET-Randbedingungen gegeben, während die NEUMANN-Randbedingungen ebenfalls nur schwach erfüllt werden müssen und nach Anwendung des GAUSSschen Integralsatzes zur schwachen Form hinzutreten. Die Formulierung der schwachen Form in primären Variablen bildet den Ausgangspunkt zur Entwicklung eines GALERKIN-Verfahrens, bei dem Test- und Interpolationsfunktionen aus demselben Funktionsraum stammen [Red98, Hug00a, Bat02, Red05, Zie13].

Zur Lösung der schwachen Form erfolgt die räumliche Unterteilung des Gesamtgebietes und damit die Zerlegung in finite Elemente mit Knoten und Kanten. Auf der so entstandenen Vernetzung werden Funktionsräume für Test- und Interpolationsfunktionen definiert. Dafür haben sich sowohl LAGRANGE-Polynome aufgrund ihrer KRONECKER- δ -Eigenschaft als auch LEGENDRE-Polynome für hierarchische Elementtypen bei p -Adaption als besonders geeignet erwiesen. Im Zuge der geometrischen Modellerstellung mit Hilfe von CAD-Systemen kommen auch die dort verwendeten *Spline*-Funktionen in ihrer Ausprägung als *Non-Uniform Rational B-Splines* (NURBS) im Diskretisierungsprozess der Finite-Elemente-Methode zum Einsatz und entwickeln diesen zur isogeometrischen Analyse hin weiter [Cot09].

Für alle Ansatzfunktionen gilt jedoch, dass sie sowohl vollständig sein müssen, um den exakten Lösungsverlauf abbilden zu können, als auch kompatibel, so dass die Konsistenz des Verfahrens gewährleistet ist. Die Kompatibilität fordert von den Ansatzfunktionen eine ausreichend häufige stetige Differenzierbarkeit sowohl zur Gewährleistung der Konformität über die Elementkanten hinweg als auch innerhalb eines Elementes zur Beschränkung der Elementenergie. Bei sämtlichen diskretisierten Elementen erfolgt die Auswertung der Elementintegrale unter Verwendung eines Referenzelementes, das in natürlichen Koordinaten definiert ist, so dass ei-

ne Projektion mit Hilfe der JACOBI-Matrix zwischen der tatsächlichen Elementgeometrie und dem Referenzelement stattfindet. Die Forderung nach einer stets positiven Determinante der JACOBI-Matrix gewährleistet bei einem Element ohne Rankabfall die Stabilität des Verfahrens. Für die Finite-Elemente-Methode ergeben die Stabilität und die durch die Ansatzfunktionen zu gewährleistende Konsistenz zusammen die Konvergenz bei Netzverfeinerung oder Erhöhung der Ansatzordnung [Bat02, Fel04, Str08].

Die Assemblierung sämtlicher numerisch ausgewerteter Elementintegrale führt auf eine globale Systemmatrix, die infolge der nur gebietsweise benachbarten Elemente eine blockdiagonale Bandstruktur aufweist und nur sehr dünn besetzt ist. Besitzt die mittels Finiter-Elemente-Methode räumlich diskretisierte partielle Differentialgleichung eine nichtlineare Gestalt, so ist auch das nach der Diskretisierung entstandene gewöhnliche Differentialgleichungssystem nichtlinear [Bat02].

Im Rahmen der klassischen Vorgehensweise zur Lösung von Anfangs-Randwertaufgaben der Kontinuumsmechanik erfolgt der räumlichen Diskretisierung nachgeschaltet die Verwendung eines Zeitschrittverfahrens zur Integration des gewöhnlichen Differentialgleichungssystems. Explizite Verfahren bieten hierbei den Vorteil, dass eine vorhandene Nichtlinearität bei der Zeitintegration stets aufgelöst wird und sich für jeden Zeitschritt ein lineares algebraisches Gleichungssystem ergibt. In der Regel sind den expliziten Verfahren, deren Zeitschrittwahl stark eingeschränkt ist und häufig zu sehr kleinen Zeitschritten führt, jedoch implizite Integrationsverfahren vorzuziehen. Neben der großen Familie der RUNGE-KUTTA-Verfahren, die nur auf Differentialgleichungssysteme erster Ordnung anwendbar sind, haben sich besonders die Zeitintegrationsverfahren der NEWMARK-Familie, die direkt auch für Systeme zweiter Ordnung verfügbar sind, als besonders geeignet erwiesen [Lam91, Bre96, Mat96, Asc98].

Bei vorhandener Nichtlinearität bleibt diese jedoch bei impliziten Verfahren als nichtlineares algebraisches Gleichungssystem bestehen und ist dann iterativ mittels PICARD- oder NEWTON-RAPHSON-Verfahren zu lösen. Hierbei bietet das NEWTON-RAPHSON-Verfahren aufgrund seines schematischen Vorgehens unter Verwendung der Richtungsableitung den Vorteil, dass es auch bei Gleichungssystemen ohne charakteristische Struktur anwendbar ist [Red05, Wri08].

Die auskonvergierte Lösung eines Zeitschrittes ergibt schlussendlich die Koeffizienten der Interpolationspolynome, die gleichzeitig die Funktionswerte an den Knoten sind und damit das Lösungsfeld für das gesamte Berechnungsgebiet aufspannen. Mathematisch bietet die Finite-Elemente-Methode den Vorteil, dass sie über ihre Verbindung zur Variationsrechnung und Funktionalanalysis als Methode zur Bereitstellung einer konvergenten Serie von Näherungslösungen sowohl mit *a priori* als auch mit *a posteriori* Fehlerschätzern ausgestattet ist und darüber die Güte der berechneten Lösung stets abgeschätzt werden kann [Wal97, Hug00a, Sza11, Zie13].

Raum-Zeit-Diskretisierung

Neben dem klassische Vorgehen mit algorithmischer Trennung bei der Integration von Raum- und Zeitbereich, bei der zur Diskretisierung des Raumes Ω finite Elemente zur Anwendung kommen und der Zeitbereich I anschließend mittels eines Zeitintegrationsverfahrens z.B. aus der NEWMARK- oder RUNGE-KUTTA-Familie beschriftet wird, ist es auch möglich, das räum-

liche und zeitliche Gebiet einheitlich als Raum-Zeit-Gebiet $Q = \Omega \times I$ zu behandeln. Die gleichartige Diskretisierung des Raum-Zeit-Gebietes mit finiten Elementen unter Verwendung von Ansatzfunktionen auf Tensorproduktbasis in Raum- und Zeitrichtung erfolgte erstmals von HUGHES für den Einsatz in der Strukturdynamik [Hug88], wobei diesem grundlegende Arbeiten u.a. von ARGYRIS und ODEN vorausgingen [Arg69, Ode69].

Gegenüber dem semidiskreten wird beim volldiskreten Vorgehen die Zeit t neben den Raumrichtungen \mathbf{x} als zusätzliche Koordinate behandelt und die Integration der gewichteten Residuen geschieht zusammenfassend über das Raum-Zeit-Gebiet

$$\int_Q (\bullet) \, dQ = \int_I \int_\Omega (\bullet) \, d\Omega \, dt \quad \text{bzw. dessen Rand} \quad \int_P (\bullet) \, dP = \int_I \int_\Gamma (\bullet) \, d\Gamma \, dt \quad . \quad (3.1)$$

Wie auf dem Raumgebiet kann über die Wahl der Ansatzordnung auch die Approximationsgenauigkeit in Zeitrichtung gezielt gesteuert werden. Auch stehen infolge der Ausweitung der mathematischen Grundlagen der Finite-Elemente-Theorie vom Raum- auf den Zeitbereich lokale und globale Fehlerschätzer zur Verfügung, so dass adaptive h - und p -Vernetzungsstrategien nicht nur im Raum, sondern auch im Zeitgebiet anwendbar sind und eine gezielte Anpassung der Diskretisierung zur Verfolgung der Charakteristiken prinzipiell möglich ist [Gro01, Neu13].

Seinen wesentlichen Vorteil erzielt eine Raum-Zeit-Diskretisierung jedoch bei veränderlichen Gebieten mit beweglichen Rändern [Tez92b, Tez92c]. Infolge der simultanen Diskretisierung des Raum-Zeit-Gebietes wird die Gebietsbewegung stets zu jedem Zeitpunkt erfasst und bei der Integration berücksichtigt, so dass, obwohl die Modellgleichungen weiterhin in EULERScher Betrachtungsweise formuliert sind, die *Geometric Conservation Law* (GCL) stets eingehalten ist und auf eine Formulierung der Modellgleichungen in ALE-Betrachtungsweise verzichtet werden kann [Les96]. Die ausführliche Darstellung der Bedeutung der GCL für die Berechnung auf veränderlichen Gebieten und des Zusammenhanges zwischen Raum-Zeit-Diskretisierungen als volldiskrete Untermenge von ALE-Verfahren erfolgt in Abschnitt 3.4.1.

Im Hinblick auf den sich nur in positive Zeitrichtung ausbreitenden Informationsfluss kann das Raum-Zeit-Gebiet Q in eine Serie aufeinanderfolgender Zeitscheiben Q_n zerlegt werden, auf denen dann sukzessive die Lösung der schwachen Form gesucht wird. In Abbildung 3.1a ist exemplarisch eine Folge von drei Zeitscheiben dargestellt, für die in Abbildung 3.1b exemplarisch die jeweiligen Gebiets- und Randbezeichnungen aufgeführt sind.

In Analogie zur räumlichen Diskretisierung kann der zeitliche Verlauf der Zustandsvariablen von einer zur nächsten Zeitscheibe sowohl stetig wie bei einer klassischen, kontinuierlichen GALERKIN-Formulierung (cG_t -Formulierung) als auch unstetig entsprechend einer diskontinuierlichen GALERKIN-Formulierung (dG_t -Formulierung) sein. Zwar bietet die cG_t -Formulierung formal eine höhere Genauigkeitsordnung, verliert diese jedoch mit zunehmendem konvektivem Einfluss, so dass für die numerische Berechnung konvektionsdominierter Transportvorgänge die Verwendung einer dG_t -Formulierung vorteilhaft ist [Wal02, Car13, Rei16]. Der über die Zeitscheibengrenze diskontinuierliche Verlauf einer Zustandsgröße z ist in Abbildung 3.2a beispielhaft dargestellt. Eine ausführliche Analyse im Hinblick auf die Stabilität und Genauigkeit von kontinuierlichen und diskontinuierlichen GALERKIN-Zeitintegrationsverfahren findet sich in [Gro01, Hüb03, Rei16].

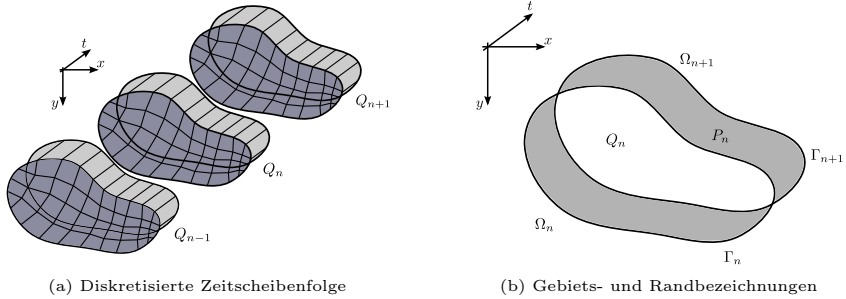


Abb. 3.1: Zeitscheiben einer Raum-Zeit-Diskretisierung

Analog zu den in Anhang A.2 erläuterten räumlich diskontinuierlichen GALERKIN-Verfahren findet auch bei einer dG_t -Formulierung nach Anwendung des GAUSSSchen Integralsatzes die Kontinuitätsbedingung als Sprungterm Eingang in die schwache Form. Dabei öffnet die Konstruktion der nicht eindeutig definierten numerischen Flussfunktion im über den räumlichen Zeitscheibenrand definierten Sprungintegral die Möglichkeit zur Entwicklung unterschiedlicher Integrationsverfahren. Für die von HUGHES & HULBERT für den Einsatz in der Strukturdynamik entwickelte dG_t -Formulierung [Hug88, Hul92], die von HANSBO für die Berechnung von inkompressiblen, viskosen Strömungen weiterentwickelt wurde [Han92a, Han92b], gilt, dass das Verfahren implizit, von 3. Ordnung und für lineare Differentialgleichungen A-stabil ist [Joh93]. Darüber hinaus verhält es sich insbesondere auch auf groben Netzen sehr robust und weist analog zur dG_x -Formulierung infolge seiner Fähigkeit zur Dämpfung numerischer Oszillationen ebenso für nichtlineare Differentialgleichungen ein sehr gutes Stabilitätsverhalten auf. Dieses bleibt sogar bei nichtglatten Randbedingungen weiterhin vorhanden. Nachteilig ist lediglich die gegenüber klassischen und kontinuierliche Zeitintegrationsverfahren größere Zahl an Unbekannten je Zeitschritt, die zu einem höheren Berechnungs- und Speicheraufwand führt.

Insbesondere für die Strömungsberechnung auf veränderlichen Gebieten mit beweglichen Rändern und Grenzflächen haben TEZDUYAR ET AL. die Kombination von räumlich kontinuierlicher und zeitlich diskontinuierlicher Approximation unter der Bezeichnung *Deforming-Spatial-Domain/Space-Time Procedure* (DSD/ST-Verfahren) als eigenständiges Raum-Zeit-Finite-Elemente-Verfahren etabliert [Tez92b, Tez92c, Beh94, Mas97]. Der Sprungterm beinhaltet hierbei die raum-zeitlich gewichtete Zustandsgröße der jeweils betrachteten Bilanzgleichung, so dass ihre Übertragung auf die nachfolgende Zeitscheibe lediglich im integralen Mittel gewährleistet ist (vgl. Gleichung (3.14a) bzw. (3.43)). Auf den Arbeiten von TEZDUYAR ET AL. aufbauende Erweiterungen von HUGHES ET AL. legen den Grundstein zu einer residuellen Multiskalenbetrachtung und liefern mit NURBS als Ansatzfunktionen den Übergang zur isogeometrischen Analyse [Hug96, Hug05].

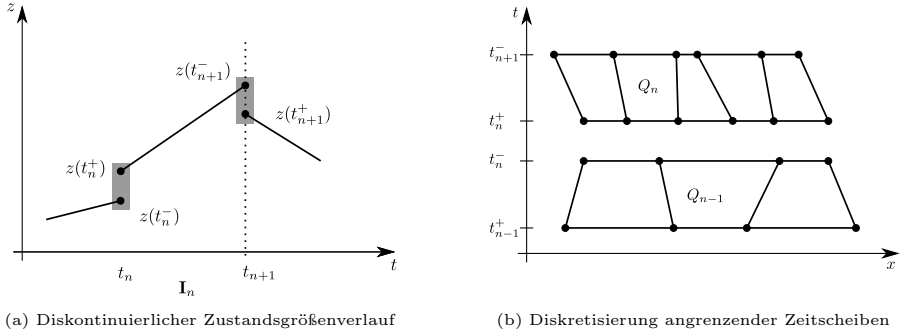


Abb. 3.2: Zeit-diskontinuierliches GALERKIN-Verfahren

Auch wenn prinzipiell der Zeitschritt für jedes Element separat gewählt werden kann, erfolgt, wie in Abbildung 3.2b dargestellt, die Festlegung des Zeitschrittes für alle Elemente einheitlich, so dass jede Zeitscheibe zu einem festen Zeitpunkt beginnt und endet. Dabei können jedoch die räumlichen Diskretisierungen angrenzender Zeitscheiben voneinander abweichen, wobei eine verlustfreie Informationsübertragung mit der vollständigen Integration des Sprungterms weiterhin gewährleistet wird.

In Übereinstimmung zu semidiskreten Formulierungen gilt auch für Raum-Zeit-Diskretisierungen, dass zur Gewährleistung der Stabilität und zur Erreichung der theoretischen Genauigkeiten eine angepasste Abstimmung von räumlicher und zeitlicher Diskretisierung gegeben sein muss. Die Grundlage hierfür liefert eine von NEUMANN-Stabilitätsanalyse mit der sich daraus ableitenden Stabilitätsbedingung [Sha91]. Vielfach konnte die von TEZDUYAR entwickelte Methode bereits ihre Genauigkeit und Robustheit unter Beweis gestellt [Wal02, Hüb03, Sun10, Köl05, Pas14, Rei16]. Im Rahmen dieser Arbeit kommt sie daher erweitert um ein Grenzflächenauflösungs- und ein Netzbewegungsverfahren zur Berechnung von ein- und zweiphasigen Strömungen auf veränderlichen Gebieten zum Einsatz.

3.1.2 Finite-Elemente-Methode bei Strömungsberechnungen

Einordnung

Viskoses Strömungsverhalten. Wesentliches Merkmal bei Strömungsvorgängen ist der turbulente Charakter als Folge des in Abschnitt 2.1.1 vorgestellten viskosen, reibungsbehafteten Materialverhaltens, der zu einer ausgeprägten Grenzschicht- und Wirbelbildung mit einer großen Bandbreite an räumlichen und zeitlichen Skalen im Strömungsfeld führt [Sch06, Dur06, Her06]. Die in den reibungsbeeinflussten Gebieten der Strömung entstehenden Wirbelstrukturen zerfallen im Laufe ihrer Bewegung nach und nach in kleinere Wirbel, wobei sie ihre Bewegungsenergie kaskadenförmig an die kleineren Strukturen weitergeben, bis diese im Bereich der KOLMOGOROW-Länge in Wärme dissipiert wird. Gegenüber numerischen Berechnungen in der

Strukturmechanik, bei denen der Schwerpunkt auf einer realitätsnahen Beschreibung des Materialverhaltens liegt, stellt in der numerischen Strömungsmechanik die Abbildung des Multiskalencharakters des Strömungsfeldes die wesentliche Herausforderung dar, welche aus den von der Turbulenz erzeugten Wirbelstrukturen herrührt [Fer08, Don03, Zie14b]. Ausgehend von unterschiedlichen mathematischen Formulierungen hat sich dafür eine Vielzahl an numerischen Verfahren etabliert, die jeweils ihren eigenen, speziellen Fokus haben. Neben der heute noch vorwiegend für theoretische Betrachtungen verwendeten Finite-Differenzen-Methode kommen die Finite-Volumen-Methode und die Finite-Elemente-Methode zum Einsatz. Daneben existieren für spezielle Anwendungsgebiete noch spektrale und netzfreie Verfahren sowie numerische Methoden basierend auf einer Wirbelformulierung [Hug04a, Fra04, Win04].

FEM und FVM. Ursprünglich hat in der numerischen Strömungsmechanik die FVM aufgrund ihrer Stabilität und Robustheit sowie ihrer globalen und lokalen Erhaltungseigenschaften dominiert [Fer08]. Jedoch war es möglich, die Vorteile der FEM im Hinblick auf Genauigkeit und Flexibilität bei der Diskretisierung komplexer Geometrien und der zugehörigen programmtechnischen Umsetzung mit Einführung von Stabilisierungsverfahren in den 1970er Jahren auch auf die numerische Berechnung von Strömungsvorgängen zu übertragen [Fra03, Hug04b]. Prinzipiell können beide Verfahren als Teilgebiete ein und derselben Methodenfamilie angesehen werden, da Finite-Volumen-Verfahren als Varianten niedriger Ordnung von gemischten oder diskontinuierlichen Finite-Elemente-Formulierungen interpretierbar sind [Ran04, Car13]. Daneben ist es aber auch möglich, die der schwachen Formulierung der FEM zugrundeliegende globale Erhaltungseigenschaft unter speziellen Voraussetzungen lokal in Untergebieten oder sogar knotenbezogen zu erzielen [Com91, Giu92, Hug00b]. Der mit Variationsrechnung und Funktionalanalysis sowie Optimierungstheorie umfangreiche mathematische Unterbau und die sich daraus ergebenden Fehlerschätzer ermöglichen insbesondere angepasste h - und p -Adaptionstrategien im Hinblick auf eine gezielte Lösungsverbesserung.

Turbulenzmodellierung. Unabhängig vom verwendeten numerischen Verfahren ist jedoch bei Strömungsberechnungen die Abbildungstiefe der Wirbelstrukturen und des damit einhergehenden multiskalen Charakters festzulegen [Sag04, Dur04, Fer08]. Prinzipiell beschreiben die NAVIER-STOKES-Gleichungen (2.64) alle in der Strömung vorhandenen räumlichen und zeitlichen Skalen, so dass im Rahmen einer direkten numerischen Simulation (DNS) eine vollständige Auflösung sämtlicher Strukturen möglich ist. In Abhängigkeit der REYNOLDS-Zahl führen direkte numerische Simulationen bei vollständiger Auflösung sämtlicher Wirbelstrukturen zu Gleichungssystemen mit $\text{Re}^{9/4}$ Knoten, weshalb sie infolge des hohen Rechen- und Speicherbedarf nur auf begrenzten Gebieten und für spezielle Anwendungsfälle vorwiegend in der Forschung zur Anwendung kommen. Dort dienen ihre Ergebnisse als Quasi-Referenzlösung von Strömungen auf komplex berandeten Geometrien, für die keine analytische Lösung verfügbar ist.

Daneben ist es auch möglich durch einen Filter- oder Mittelungsprozess die kleinskaligen Wirbelstrukturen mit ihren um einen Strömungsmittelwert stattfindenden hochfrequenten Schwankungsbewegungen aus der Lösung zu entfernen, so dass diese regulärer und glatter wird. Im Rahmen einer Grobstruktur-Simulation (*large eddy simulation*, LES) übernimmt das Berechnungsnetz als Tiefpass diese Filtereigenschaft, so dass alle Wirbelstrukturen unterhalb

der *cutoff*-Längenskala nicht mehr abgebildet werden. Der vorwiegend dissipative Einfluss der in der Berechnung nicht erfassten kleinskaligen Strukturen ist dann über algebraische Feinstrukturmodelle zusätzlich in der numerischen Berechnung zu erfassen.

Infolge des trotz Filterung weiterhin hohen Berechnungsaufwands der LES kommt stattdessen in der industriellen Praxis eine Mittelung der NAVIER-STOKES-Gleichungen zur Anwendung, die das Strömungsfeld statistisch in eine zeitgemittelte Hauptströmung mit einem ihr überlagerten Schwankungsanteil aufteilt [Hüb03, Alf16]. In den zeitgemittelten NAVIER-STOKES-Gleichungen tritt dadurch ein nach REYNOLDS benannter, den viskosen Schubspannungen ähnlicher, zusätzlicher Spannungstensor hinzu, der den Einfluss des Schwankungsanteils auf die Hauptströmung berücksichtigt und Grundlage der Namensgebung als *Reynolds-Averaged-Navier-Stokes*-Gleichungen (RANS-Gleichungen) ist. Zur Schließung des Gleichungssatzes ist ein zusätzliches Turbulenzmodell notwendig, dass im Allgemeinen unter Verwendung der BOUSSINESQ-Approximation für die Wirbelviskosität eine dem Fluid-Materialgesetz folgende Beziehung zwischen den REYNOLDS-Spannungen und dem Geschwindigkeitsgradienten des gemittelten Strömungsfeldes herstellt. Dabei existieren zur Berücksichtigung des räumlichen und zeitlichen Verlaufs der Turbulenz und der damit verbundenen Abschätzung des Geschwindigkeits- und Längenmaßstabs sowohl algebraische als auch differentielle Modelle, unter denen das k - ω -Modell nach WILCOX eine breite Anwendung erfahren hat [Wil98].

Mathematische Eigenschaften. Die inkompressiblen NAVIER-STOKES-Gleichungen (2.64) besitzen mathematisch einen parabolischen Charakter, der im stationären Fall elliptisch wird, so dass reguläre Gleichungsparameter sowie Anfangs- und Randbedingungen prinzipiell eine ebenfalls reguläre Lösung gewährleisten [Ran04]. Mit zunehmender REYNOLDS-Zahl Re dominiert jedoch quantitativ der aus der EULERSchen Betrachtungsweise hervorgegangene konvektive Term. Es stellt sich ein hyperbolisches Verhalten ein, bei dem klassische Finite-Elemente-Formulierungen mit den gleichen symmetrischen Funktionsräumen für Test- und Interpolationsfunktionen ohne Zusatzmaßnahmen ein nicht mehr stabiles Lösungsverhalten zeigen. Auch führen nicht aufgelöste Skalen zur Herabsetzung der Genauigkeit [Don03, Bat02].

Die klassische Anwendung der Finite-Elemente-Methode zur räumlichen Diskretisierung der inkompressiblen NAVIER-STOKES-Gleichungen führt auf ein gewöhnliches Differentialgleichungssystem der Form

$$\dot{\mathbf{M}} \cdot \dot{\mathbf{z}} + \hat{\mathbf{K}} \cdot \mathbf{z} = \hat{\mathbf{f}}, \quad (3.2)$$

in dem die Unbekannten \mathbf{z} die zeitabhängigen Funktionen der Geschwindigkeit $\hat{\mathbf{v}}$ und des Druckes $\hat{\mathbf{p}}$ an den Knoten sind [Don03, Gre00, Red05]. Im Detail besitzt das semidiskrete, gewöhnliche Differentialgleichungssystem die Struktur:

$$\left[\begin{array}{c|c} \mathbf{M} & \\ \hline & \mathbf{0} \end{array} \right] \cdot \left[\begin{array}{c} \dot{\mathbf{v}} \\ \dot{\mathbf{p}} \end{array} \right] + \left[\begin{array}{c|c} \mathbf{K} + \mathbf{C}(\mathbf{v}) & \mathbf{G} \\ \hline \mathbf{G}^T & \mathbf{0} \end{array} \right] \cdot \left[\begin{array}{c} \mathbf{v} \\ \mathbf{p} \end{array} \right] = \left[\begin{array}{c} \mathbf{f} \\ \mathbf{0} \end{array} \right]. \quad (3.3)$$

In diesem sind zwar die Massenmatrix $\dot{\mathbf{M}}$ bzw. \mathbf{M} und die Viskositätsmatrix \mathbf{K} symmetrisch, jedoch ist die Konvektionsmatrix \mathbf{C} und damit auch die Gesamtsteifigkeitsmatrix $\hat{\mathbf{K}}$ unsymmetrisch und damit nicht positiv-definit, was sich besonders bei iterativen Lösungs-

verfahren auswirkt. Darüber hinaus verweisen die Null-Matrizen $\mathbf{0}$ auf den Hauptdiagonalblöcken von Gesamtmassen- und Steifigkeitsmatrix zum einen auf ein singuläres Verhalten des Druckes in der Zeit, das zwingend eine implizite Zeitintegration verlangt. Zum anderen degeneriert daneben die diskretisierte Massebilanz (2.38) zu einer algebraischen Nebenbedingung für das Geschwindigkeitsfeld, so dass das semidiskrete Gleichungssystem als Algebroidifferentialgleichungssystem zu behandeln ist [Bre96, Asc98, Kun06]. Zusätzlich zeigt die Gestalt der Steifigkeitsmatrix $\tilde{\mathbf{K}}$ des Gesamtsystems auch, dass es sich bei der Formulierung der NAVIER-STOKES-Gleichungen in den primären Variablen Geschwindigkeit und Druck um eine gemischte Formulierung handelt, in der die Ansätze für beide Lösungsfelder aufeinander abzustimmen sind [Baa04, Bre91, Aur04].

Werden sowohl der konvektive Strömungseinfluss als auch die gemischte Formulierung bei der Verwendung der Finite-Elemente-Methode entsprechend berücksichtigt, so gelingt es, neben ihrer Genauigkeit auch ihre Konvergenzeigenschaften sowie ihre Fähigkeit zur flexiblen Behandlung komplexer Geometrien für numerische Strömungsberechnungen nutzbar zu machen [Wal99]. In den beiden nachfolgenden Abschnitten werden die dafür notwendigen Maßnahmen jeweils ausführlich besprochen.

Stabilisierung

Der bei größeren REYNOLDS-Zahlen zunehmende konvektive Einfluss führt zu einer immer stärkeren Richtungsabhängigkeit der Informationsausbreitung im Berechnungsgebiet und zu immer feiner aufzulösenden Grenzschichten und Wirbelstrukturen, so dass klassische Finite-Elemente-Formulierungen die Lösung nicht mehr stabil abbilden können [Don03, Bat02, Fer08]. Die Wahl gleicher symmetrischer Ansatzräume für Test- und Interpolationsfunktionen, wie für den eindimensionalen Fall in Abbildung 3.3a exemplarisch dargestellt, ist gut geeignet für die in den elliptischen Differentialgleichungen der Strukturmechanik auftretenden selbstadjungierten Operatoren, welche zu symmetrischen Matrizen führen [Bat02, Bon12, Ziel14a]. Jedoch bedarf die Diskretisierung der konvektionsdominierten Modellgleichungen der Strömungsmechanik zusätzlicher, konsistent formulierter Stabilisierungsmaßnahmen, die gleichzeitig keine Genauigkeitseinschränkung bewirken dürfen.

SUPG-Verfahren. Die sich mathematisch in der nicht symmetrischen Konvektionsmatrix \mathbf{C} widerspiegelnde Richtungsabhängigkeit wird in der Finite-Elemente-Formulierung unter Hinzunahme eines zusätzlichen Stabilisierungsterms berücksichtigt. Dieser bewirkt ähnlich einem *upwinding*, wie in Abbildung 3.3b beispielhaft dargestellt, eine Anpassung der Wichtungsfunktionen an die jeweils vorherrschende Hauptströmungsrichtung [Hug04b, Gro01]. Infolge der daraus entstehenden unterschiedlichen Ansatzräume für Test- und Interpolationsfunktionen geht die ursprüngliche BUBNOW-GALERKIN-Formulierung in eine PETROW-GALERKIN-Formulierung über, so dass dieses Stabilisierungsverfahren als *Streamline-Upwind-Petrov-Galerkin*-Verfahren (SUPG-Verfahren) bezeichnet wird [Bro82]. Eine ausführliche Diskussion der SUPG-Stabilisierung erfolgt in Abschnitt 3.2.1. Neben der SUPG-Stabilisierung existieren noch weitere das Konvektionsverhalten der Strömung betreffende Stabilisierungsverfahren, die z.B. auf einer *Least-Squares*-Stabilisierung basieren [Fra92]. Analog dem SUPG-Verfahren beeinflussen diese die Gesamtsystemmatrix derart, dass eine stabile Lösung erzielbar wird.

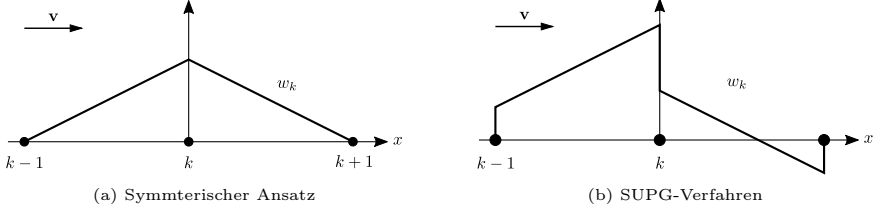


Abb. 3.3: Verlauf der Wichtungsfunktion

Unabhängig vom verwendeten Stabilisierungsverfahren werden in der Regel sowohl die Konsistenz der schwachen Form als auch die Einheitenkonformität des Stabilisierungsterms über den Stabilisierungsparameter τ gewährleistet. Für dessen Ermittlung existieren eine Vielzahl von Berechnungsverfahren [Tez92a, Tez00, Tez01, Tez03], wobei die Untersuchungen zu seiner konsistenten Ermittlung noch nicht abgeschlossen zu sein scheinen.

Variationelle Multiskalenformulierung. Neben den ursprünglich heuristischen und vorwiegend dimensionsanalytisch geprägten Entwicklungsverfahren zur Bestimmung des Stabilisierungsparameters τ hat die von HUGHES entwickelte variationelle Multiskalenformulierung (*variational multiscale method*, VMS) und ihre residuen-basierte Erweiterung (*residual-based variational multiscale method*, RBVMS) den Zusammenhang zwischen der Stabilisierung und den nicht aufgelösten Skalen einer Strömung aufgezeigt [Hug95, Gra03, Gam10, Baz07]. Die Berücksichtigung, dass die bei einer numerischen Berechnung unterhalb der Abmessungen des Berechnungsnetzes liegenden Phänomene und Skalen nicht aufgelöst werden, motiviert die additive Aufteilung des Lösungsfeldes z in einen aufgelösten, grobskaligen Anteil \bar{z} und einen nicht aufgelösten, feinskaligen Anteil z' . Der Dekomposition folgt die analoge Aufspaltung der zugehörigen Testfunktionen, so dass sich die schwache Form in zwei separate Anteile, $\bar{\mathcal{L}}$ und \mathcal{L}' , jeweils für den grobskaligen und den feinskaligen Anteil untergliedern lässt.

Die Modellierung des feinskaligen Lösungsfeldes z' unter Verwendung GREENScher Funktionen und unter der lokalisierenden Annahme, dass dieses auf den Elementrändern verschwindet, erlaubt eine Lösung für den feinskaligen Anteil in Abhängigkeit des abbildbaren Lösungsfeldes \bar{z} . Das Einsetzen der feinskaligen Lösung $z'(\bar{z})$ in die schwache Form des grobskaligen Lösungsfeldes $\bar{\mathcal{L}}$ führt dort zu einem zusätzlichen Term, der die Einflüsse der nicht aufgelösten Skalen z' auf das Lösungsfeld der aufgelösten Skalen \bar{z} darstellt. Dieser Term ist denjenigen der gebräuchlichen Stabilisierungsverfahren identisch und bildet konsistent hergeleitet den Einfluss der nicht aufgelösten Skalen auf das Lösungsfeld der aufgelösten Skalen ab. Mathematisch beschreibt der feinskalige Anteil auch den Diskretisierungsfehler [Don03]. Die VMS stellt damit den Zusammenhang zwischen den konvektiven Auswirkungen der richtungsabhängigen Informationsausbreitung und den multiskalen Phänomenen und ihrer physikalisch konsistenten Modellierung dar. Darüber hinaus bietet sie ein systematisches Vorgehen zur Herleitung von Stabilisierungsverfahren [Baz15].

Inkompressibilität

Auch ohne das Auftreten einer stark richtungsabhängigen Informationsausbreitung können die inkompressiblen NAVIER-STOKES-Gleichungen ein instabiles numerisches Lösungsverhalten aufweisen. Dabei zeigt sich die Instabilität jedoch nicht im Geschwindigkeitsverlauf sondern im Druckfeld und liegt in der Abstimmung der Ansatzordnungen der beiden Zustandsgrößen begründet. Mit der Annahme von Inkompressibilität und Temperaturunabhängigkeit der Dichte entfällt für ein dichtebeständiges Fluid dessen Zustandsgleichung, die einen thermodynamischen Zusammenhang zwischen Dichte ρ und Druck p herstellt. Der Druck nimmt stattdessen, wie in Gleichung (2.54) formuliert, die Eigenschaft einer rein mechanischen Größe an und die Erhaltungsgleichung der Masse (2.37) degeneriert zur Forderung nach der Divergenzfreiheit des Geschwindigkeitsfeldes (2.38). Damit kann der Druck in den inkompressiblen NAVIER-STOKES-Gleichungen (2.64) als ein zusätzlicher Freiheitsgrad angesehen werden, der die als Nebenbedingung interpretierbare Divergenzfreiheit gewährleistet [Don03, Zie13, Bat02].

Fasst man die inkompressiblen NAVIER-STOKES-Gleichungen als Differentialgleichungssystem mit Nebenbedingung auf, so lässt sich über die zugehörige variationelle Form erkennen, dass der Druck die Eigenschaft eines LAGRANGE-Multiplikators für die Forderung der Divergenzfreiheit des Geschwindigkeitsfeldes annimmt [Ran04, Aur04]. Die variationelle Form weist darüber hinaus den Lösungsvorgang der inkompressiblen NAVIER-STOKES-Gleichungen als Optimierungsaufgabe mit Nebenbedingungen aus. Dabei minimiert die gefundene Lösung das aus der Zielfunktion und den mittels LAGRANGE-Multiplikatoren gewichteten Nebenbedingungen bestehende LAGRANGE-Funktional und stellt einen Sattelpunkt des Lösungsfeldes dar. Nach der Diskretisierung tritt in der Steifigkeitsmatrix des Gesamtsystems in Gleichung (3.3) infolge der Nebenbedingung eine Null-Matrix auf der Hauptdiagonalen auf. Dies ist sowohl kennzeichnend für Optimierungsaufgaben mit Nebenbedingungen als auch für eine gemischte Formulierung, in der die Zustandsgrößen gekoppelt und die Ansatzordnungen aufeinander abzustimmen sind [Bre91, Bof08, Wri09].

Für die Existenz einer eindeutigen Lösung des Gesamtgleichungssystems muss die Gesamtsteifigkeitsmatrix $\hat{\mathbf{K}}$ in Gleichung (3.3) nicht-singulär sein sowie stetig von den Eingangsdaten abhängen. Dies ist gewährleistet, wenn die Untermatrix \mathbf{G}^T injektiv ist und ihr Kern verschwindet. Daraus folgt als notwendige Bedingung für die Existenz einer eindeutigen Lösung der inkompressiblen NAVIER-STOKES-Gleichungen, dass die Anzahl an Druck-Freiheitsgraden n_p nicht größer sein darf als die Anzahl an Freiheitsgraden für die Geschwindigkeit n_v [Zie14b, Don03]. Im Hinblick auf die Ansatzräume für beide Lösungsfelder bedeutet dies, dass die Dimension des Funktionsraumes für den Druck höchstens die Dimension des Funktionsraumes der Geschwindigkeit annehmen darf:

$$\dim \mathcal{S}_p^h \leq \dim \mathcal{S}_v^h . \quad (3.4)$$

Die Notwendigkeit der Abstimmung der Ansatzordnungen wird besonders deutlich bei dem in einer Raum-Zeit-Formulierung auftretenden Integralterm

$$\int \nabla \cdot \mathbf{w}_v^h \, p^h \, dQ = \left(\nabla \cdot \mathbf{w}_v^h, p^h \right) , \quad (3.5)$$

aus dem sich letztendlich die hinreichende Bedingung

$$\inf_{p^h \in \mathcal{S}_p^h} \sup_{\mathbf{w}_v^h \in \mathcal{V}_v^h} \frac{(\nabla \cdot \mathbf{w}_v^h, p^h)}{\|\mathbf{w}_v^h\|_{\mathcal{V}_v^h} \|p^h\|_{\mathcal{S}_p^h}} \quad (3.6)$$

zur Erzielung der Existenz einer eindeutigen und stabilen Lösung der inkompressiblen NAVIER-STOKES-Gleichungen ableitet. Diese wird sowohl als *inf-sup*-Bedingung als auch als BABUSHKA-BREZZI-Bedingung im diskreten bzw. LADYZHENSKAYA-BABUSHKA-BREZZI-Bedingung im kontinuierlichen Fall bezeichnet [Bab73, Bre74]. Werden die Ansatzordnungen der beiden Zustandsgrößen so aufeinander abgestimmt, dass die BABUSHKA-BREZZI-Bedingung eingehalten ist, so ist der Kern der Untermatrix \mathbf{G}^T Null und die Gesamtsteifigkeitsmatrix ist nicht-singulär.

Ein erster Hinweis im Hinblick auf die Abstimmung der Ansatzräume lässt sich anhand der Stetigkeitsanforderungen festmachen, die sich aus den in der schwachen Form auftretenden Ableitungsordnungen ergeben. Für die Diskretisierung der inkompressiblen NAVIER-STOKES-Gleichungen folgt daraus, dass die Ansatzordnung des Geschwindigkeitsfeldes einen Polynomgrad höher sein muss als für das Druckfeld. Neben diesem vereinfachten Ansatz wurden Familien von abgestimmten Ansatzräumen entwickelt, für die die Einhaltung der *inf-sup*-Bedingung (3.6) systematisch überprüft werden konnte [Gun12]. Für inkompressible Strömungen sind dies die TAYLOR-HOOD-Familie als Rechteckelemente und die CROUZEIX-RAVIART-Familie als Dreieckselemente.

Werden die Ansatzordnungen der Funktionenräume für beide Zustandsgrößen nicht aufeinander abgestimmt und ist daher die *inf-sup*-Bedingung (3.6) nicht eingehalten, so kann die Gesamtsteifigkeitsmatrix in Gleichung (3.3) singulär werden. Jedoch kann auch bei nicht korrekt abgestimmten Ansatzordnungen eine Lösung möglich sein, bei der das Druckfeld entweder unbegrenzte Werte annimmt oder unphysikalische Oszillationen aufweist. Dabei kann das zugehörige Geschwindigkeitsfeld sowohl eine falsche als auch eine physikalisch korrekte Lösung darstellen. Die unphysikalischen Druckoszillationen sind zu den Null-Eigenwerten der Untermatrix \mathbf{G}^T gehörende Eigenvektoren und sind in der Lösung enthalten, da nicht alle im Integral (3.5) auftretenden unzulässigen Druckzustände getestet werden konnten [Don03, Zie14b].

Die Abstimmung der Ansatzordnungen zur Erfüllung der BABUSHKA-BREZZI-Bedingung (3.6) stellt eine erhebliche Einschränkung bei der Wahl der Funktionenräume zur Diskretisierung der Zustandsgrößen dar. Insbesondere wird der für die algorithmische Umsetzung vorteilhafte Fall gleicher Polynomordnungen ausgeschlossen. Diese bieten jedoch ausgewiesene Vorzüge im Hinblick auf ihre einfache Implementierung und programmtechnische Erweiterbarkeit. Daher kann neben einer direkten Erfüllung der BABUSHKA-BREZZI-Bedingung (*Satisfying* BABUSHKA BREZZI, SBB-Vorgehen) auch mittels Druck-Stabilisierung eine implizite Erfüllung von Gleichung (3.6) gewährleistet werden (*Circumventing* BABUSHKA BREZZI, CBB-Vorgehen). Die Hinzunahme eines zusätzlichen Stabilisierungsterms stellt die Nicht-Singularität der Gesamtsteifigkeitsmatrix in Gleichung (3.3) sicher, indem vergleichbar der Wirkung eines *lifting*-Operators das ursprüngliche System geringfügig gestört wird und die Null-Einträge auf der Hauptdiagonalen mit Werten belegt werden. Im Rahmen dieser Arbeit wird dem algorithmischen Vorteil gleicher Ansatzordnungen in Verbindung mit der daraus resultierenden geringeren Anzahl an Freiheitsgraden der Vorzug gegeben [Han92b, Tez92d]. Der verwendete Elementtyp mit seiner Stabilisierung wird ausführlich in Abschnitt 3.2.1 beschrieben.

3.2 Inkompressible Navier-Stokes-Gleichungen

3.2.1 Schwache Formulierung

Residuen. Wie bereits in Abschnitt 2.3 bemerkt, ist eine allgemeine Lösung der inkompressiblen NAVIER-STOKES-Gleichungen (2.64) nicht bekannt. Nur für einfache Geometrien unter Hinzunahme weiterer, im Hinblick auf das erwartete Strömungsgeschehen vereinfachender Annahmen können geschlossene Lösungen hergeleitet werden. Daher kommen zur Untersuchung technisch relevanter Strömungssituationen Näherungsverfahren zur Anwendung. Im Rahmen einer Finite-Elemente-Methode wird dabei die tatsächliche Lösung \mathbf{z} durch die Näherungslösung \mathbf{z}^h ersetzt, welche in der Regel die Modellgleichungen nicht an jedem Punkt exakt erfüllt. Dies motiviert die Umformulierung von Impuls- und Massebilanz (2.43) bzw. (2.38) in Residuenschreibweise:

$$\mathcal{R}_{\mathbf{v}} = 0 \quad \text{mit} \quad \mathcal{R}_{\mathbf{v}} = \rho \left[\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} \right] - \nabla \cdot \mathbf{T} - \mathbf{f}, \quad (3.7a)$$

$$\mathcal{R}_p = 0 \quad \text{mit} \quad \mathcal{R}_p = \nabla \cdot \mathbf{v}. \quad (3.7b)$$

Als allgemeines Prinzip zur Herleitung eines Gleichungssatzes, mit dem eine Näherungslösung entwickelt werden kann, die die Gleichungen (3.7) bestmöglich erfüllt, eignet sich die Methode der gewichteten Residuen [Fin72], die auch bei Abwesenheit einer übergeordneten Variationsformulierung stets anwendbar ist [Sch72]. Hierbei werden die Residuen $\mathcal{R}_{\mathbf{v}}$ und \mathcal{R}_p mit $\mathbf{w}_{\mathbf{v}}$ bzw. w_p gewichtet und über das Gebiet Q mit dem Ziel integriert, die Abweichungen von der exakten Lösung integral über dem Gebiet verschwinden zu lassen:

$$\int_Q \mathbf{w}_{\mathbf{v}} \mathcal{R}_{\mathbf{v}} \, dQ + \int_Q w_p \mathcal{R}_p \, dQ = 0. \quad (3.8)$$

Die sich aus Gleichung (3.8) ergebenden Näherungslösungen \mathbf{v}^h und p^h minimieren dabei den Abstand zu den exakten, aber unbekannten Lösungsverläufen \mathbf{v} und p . Ausgehend von der mit Gleichung (3.7) gewählten Residuenformulierung werden die Kinematik (2.53) und die konstitutive Beziehung (2.63) exakt erfüllt, während dies für die Impulsbilanz (2.43) nur näherungsweise gilt. Die numerische Lösung der Residuen-Integrale erfolgt im Rahmen eines Diskretisierungsprozesses unter Verwendung der Raum-Zeit-Finite-Elemente-Methode [Arg69, Hug88, Tez92b], die besonders vorteilhaft bei in der Zeit veränderlichen räumlichen Gebieten ist (vgl. Abschnitt 3.4). Bei der Raum-Zeit-Finite-Elemente-Methode erfolgt die Integration über das gesakte Raum-Zeit-Gebiet $Q = \Omega \times I$ mit räumlichem Gebiet Ω und Zeitbereich $I = (0, T]$ sowie dem zugehörigen Rand $P = \Gamma \times (0, T]$. Dabei kann sich das räumliche Ω in der Zeit verändern, so dass $\Omega = \Omega(t)$ und $P = P(t)$ sind. Aufgrund des bei der Raum-Zeit-Finite-Elemente-Methode implizit berücksichtigten beweglichen Beobachters können trotz veränderlichem räumlichen Gebiet Ω die Modellgleichungen in EULERScher Betrachtungsweise verwendet werden, so dass diese nach Diskretisierung einer ALE-Formulierung äquivalent sind. Unter Ausnutzung des sich physikalisch nur in positive Zeitrichtung ausbreitenden Informationsflusses wird das Raum-Zeit-Gebiet in eine Sequenz aufeinanderfolgender Zeitscheiben $Q_n = \Omega \times I_n$ mit $I_n = (t_n, t_{n+1})$ zerlegt, in denen die gewichtete Residuenformulierung (3.8) nacheinander diskretisiert und näherungsweise gelöst wird.

Ansatzräume. Zur Diskretisierung der gewichteten Residuenformulierung (3.8) wird auf dem Gebiet Q_n eine geordnete Menge \mathcal{M}_k bestehend aus k Knoten eingeführt, über denen Formfunktionen S_k mit kompaktem Träger definiert sind, so dass jeder Punkt innerhalb der Zeitscheibe Q_n mittels

$$\begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ t \end{bmatrix} = \sum_{k \in \mathcal{M}_k} S_k(\boldsymbol{\xi}, \tau) \cdot \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{x}}_k \\ \hat{t}_k \end{bmatrix} \quad (3.9)$$

beschrieben werden kann. Dabei bilden die einzelnen Knoten die Eckpunkte finiter Elementen Q_e , womit die Zeitscheibe Q_n diskretisiert ist und in Q_n^h übergeht. Auf dem diskretisierten Gebiet der Zeitscheibe Q_n^h werden zur Approximation von Geschwindigkeit \mathbf{v} und Druck p als Zustandsgrößen die folgenden Funktionenräume definiert:

$$\begin{aligned} (\mathcal{S}_{\mathbf{v}}^h)_n &= \{ \mathbf{v}^h \mid \mathbf{v}^h \in [H^1(Q_n^h)]^{n_{sd}}, \mathbf{v}^h = \mathbf{g}^h \text{ auf } P_{n, \mathbf{g}}^h \}, \\ (\mathcal{S}_p^h)_n &= \{ p^h \mid p^h \in H^1(Q_n^h) \} \end{aligned} \quad (3.10)$$

Darin stellt der HILBERT-Raum $H^1(Q_n^h)$ einen endlichdimensionalen Polynomraum über der Zeitscheibe Q_n^h dar [Col64, Ode96, Heu06], der bei der Geschwindigkeit \mathbf{v}^h als vektorwertiger Zustandsgröße noch von der vorhandenen Anzahl n_{sd} an räumlichen Dimensionen abhängt und dessen Funktionen auf dem NEUMANN-Rand $P_{n, \mathbf{g}}^h$ den dort vorgeschriebenen Funktionenverlauf \mathbf{g}^h annehmen. Der Funktionenraum wird gebildet aus Polynomen erster Ordnung in Raum und Zeit, welche stetig innerhalb einer Zeitscheibe und diskontinuierlich am Zeitscheibenübergang sind [Tez92b, Tez92c]. Die Interpolationsfunktionen für die Zustandsgrößen besitzen, wie auch die Formfunktionen, einen kompakten Träger und sind elementweise definiert, so dass sich die Diskretisierung der Zustandsgrößen ergibt zu:

$$\mathbf{z}^h = \sum_{k \in \mathcal{M}_k} N_k(\boldsymbol{\xi}, \tau) \cdot \hat{\mathbf{z}}_k. \quad (3.11)$$

Für die Wichtungsfunktionen $\mathbf{w}_{\mathbf{v}}$ und w_p werden dieselben Funktionenräume wie für die Zustandsgrößen gewählt

$$\begin{aligned} (\mathcal{V}_{\mathbf{v}}^h)_n &= \{ \mathbf{w}_{\mathbf{v}}^h \mid \mathbf{w}_{\mathbf{v}}^h \in [H^1(Q_n^h)]^{n_{sd}}, \mathbf{w}_{\mathbf{v}}^h = \mathbf{0} \text{ auf } P_{n, \mathbf{g}}^h \}, \\ (\mathcal{V}_p^h)_n &= \{ w_p^h \mid w_p^h \in H^1(Q_n^h) \}, \end{aligned} \quad (3.12)$$

wobei für die die Wichtungsfunktionen $\mathbf{w}_{\mathbf{v}}^h$ des Geschwindigkeitsfeldes gilt, dass sie auf dem DIRICHLET-Rand $P_{n, \mathbf{g}}^h$ verschwinden. Dabei führt die Wahl desselben Raumes $H^1(Q_n^h)$ für die Funktionenräume von Test- und Interpolationsfunktionen, \mathcal{S}^h bzw. \mathcal{V}^h , zu einem GALERKIN-Verfahren, das mit Bezug auf die gewählte Stetigkeit der Funktionen kontinuierlich im Raum (cG_x) und diskontinuierlich im Zeitbereich (dG_t) ist. Unter Bezug auf die von WALHORN [Wal02], HÜBNER [Hüb03] und PASENOW [Pas14] in ihren Arbeiten gemachten Erfahrungen erfolgt die räumliche Diskretisierung ebenfalls mit linearen Ansatzfunktionen, so dass sich für zweidimensionale Strömungen das von TEZDUYAR in [Tez92b] eingeführte isoparametrische, trilineare 8-Knoten-Raum-Zeit-Hexaeder-Element ergibt. Das Element wird auch als Q1Q1-Element bezeichnet [Don03].

Integralgleichung. Mit den in den Gleichungen (3.10) und (3.12) definierten Funktionsräumen für Test- und Interpolationsfunktionen erfolgt die Diskretisierung der gewichteten Residuenformulierung (3.8), so dass sich unter Verwendung der Schreibweisen

$$\int_{Q_n^h} \dots dQ = \int_{I_n} \int_{\Omega_t^h} \dots d\Omega dt \quad \text{und} \quad \int_{P_n^h} \dots dP = \int_{I_n} \int_{\Gamma_t^h} \dots d\Gamma dt \quad (3.13)$$

für die Zeitscheibe Q_n^h die nachfolgende schwache Form ergibt:

$$\int_{Q_n^h} \mathbf{w}_{\mathbf{v}}^h \rho \left[\frac{\partial \mathbf{v}^h}{\partial t} + \mathbf{v}^h \cdot \nabla \mathbf{v}^h \right] dQ + \int_{\Omega_n^h} \mathbf{w}_{\mathbf{v}}^h|_n^+ \left[\left(\rho \mathbf{v}^h \right)|_n^+ - \left(\rho \mathbf{v}^h \right)|_n^- \right] d\Omega \quad (3.14a)$$

$$+ \int_{Q_n^h} \nabla \mathbf{w}_{\mathbf{v}}^h : \mathbf{T}(\mathbf{v}^h, p^h) dQ - \int_{P_{\mathbf{h},n}^h} \mathbf{w}_{\mathbf{v}}^h \cdot \mathbf{h} dP \quad (3.14b)$$

$$- \int_{Q_n^h} \mathbf{w}_{\mathbf{v}}^h \cdot \mathbf{f} dQ \quad (3.14c)$$

$$+ \int_{Q_n^h} w_p^h \left[\nabla \cdot \mathbf{v}^h \right] dQ = 0. \quad (3.14d)$$

Hierin stellen die Bestandteile (3.14a), (3.14b) und (3.14c) die schwache Form der Impulsbilanz (3.7a) dar, während (3.14d) die entsprechende schwache Form der Massebilanz (3.7b) ist. Der erste Term in (3.14a) beinhaltet den instationären und konvektiven Term, der aus dem Wechsel von der LAGRANGESchen in die EULERSche Betrachtungsweise resultiert und zusammengefasst die materielle Zeitableitung des Impulses darstellt. Der in diesem Term enthaltene konvektive Anteil $\mathbf{v}^h \cdot \nabla \mathbf{v}^h$ umfasst die gesamte Nichtlinearität der NAVIER-STOKES-Gleichungen, die physikalisch im turbulenten Charakter einer Strömung und der damit verbundenen großen Bandbreite an Längen- und Zeitskalen augenscheinlich wird. Daneben gewährleistet der zweite Term in (3.14a) als Sprungterm unter Verwendung der Schreibweise

$$\mathbf{v}^h|_n^\pm = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \mathbf{v}(t_n \pm \varepsilon), \quad (3.15)$$

die Informationsweitergabe zwischen der vorausgegangenen Zeitscheibe Q_{n-1}^h und der aktuellen Q_n^h , welche *a priori* infolge des zeitlich diskontinuierlichen Verlaufes der Interpolationsfunktionen (dG_t -Verfahren) nicht gegeben ist. In der zweiten Zeile der schwachen Form der Impulsbilanz stellt (3.14b) die gewichtete Divergenz der Spannungstensors \mathbf{T} nach Anwendung des GAUSSschen Integralsatzes dar:

$$- \int_{Q_n^h} \mathbf{w}_{\mathbf{v}}^h \cdot \nabla \cdot \mathbf{T}(\mathbf{v}^h, p^h) dQ = \int_{Q_n^h} \nabla \mathbf{w}_{\mathbf{v}}^h : \mathbf{T}(\mathbf{v}^h, p^h) dQ - \int_{P_{\mathbf{h},n}^h} \mathbf{w}_{\mathbf{v}}^h \cdot \mathbf{h} dP. \quad (3.16)$$

Infolge der Überführung der Ableitungsforderung vom Spannungstensor \mathbf{T} auf die Wichtungsfunktion $\mathbf{w}_{\mathbf{v}}^h$ reduziert sich die Stetigkeitsanforderung an die primären Variablen Geschwindigkeit und Druck. Bei den Spannungen und beim Druck führt dies sogar soweit, dass weder

räumliche noch zeitliche Ableitungen vorliegen, so dass prinzipiell für diese eine C_0 -Stetigkeit der Interpolationsfunktionen im Element genügen würde. Daneben führt die partielle Integration dazu, dass die vorgeschriebenen Randspannungen \mathbf{h} auf dem NEUMANN-Rand $P_{\mathbf{h},n}^h$ ebenfalls Bestandteil der schwachen Form werden. Die dritte Zeile mit (3.14c) beinhaltet ausschließlich die gewichteten Volumenlasten \mathbf{f} , die wie auch die Randspannungen als Lastgrößen vorgegeben sind. Neben der schwachen Form der Impulsbilanz stellt (3.14d) die schwache Form der Massebilanz dar. Insgesamt ergibt die einheitliche Diskretisierung von Raum- und Zeitbereich mittels finiter Elemente ein robustes numerisches Verfahren, das besonders geeignet für die Abbildung von Strömungsvorgängen auf veränderlichen Gebieten ist sowie im Hinblick auf die verwendeten linearen Funktionen und der zwischen zwei Zeitscheiben zugelassenen Diskontinuität als Zeitintegrationsverfahren eine Genauigkeit von 3. Ordnung aufweist [Joh93].

Stabilisierung. Die gewählten linearen Polynomverläufe, denen mit den Gleichungen (3.10) und (3.12) dieselben Funktionsräume für Test- und Interpolationsfunktionen zugrunde liegen, können zum Auftreten von numerischen Oszillationen sowohl im Geschwindigkeits- als auch im Druckfeld führen. Im Geschwindigkeitsfeld machen sich diese bei starker Konvektionsdominanz bemerkbar, während sie im Druckfeld bei nahezu jedem Strömungszustand präsent sind. Eine Eliminierung der numerischen Oszillationen ist unter Hinzunahme zusätzlicher Terme im Rahmen einer Stabilisierung möglich. Die bei einer Strömung vorliegende Konvektion bewirkt eine gerichtete Informationsausbreitung, die sich mathematisch in einem hyperbolischen Charakter der zugrunde liegenden Differentialgleichung widerspiegelt und dessen Maßzahl die REYNOLDS-Zahl Re ist. Der im Rahmen eines BUBNOW-GALERKIN-Verfahrens auch für die Testfunktionen identisch mit den Interpolationsfunktionen gewählte Funktionsraum mit kompaktem und symmetrischem Träger ist dabei nicht in der Lage, dem Lösungsfeld die Richtungsabhängigkeit ausreichend einzuprägen. Hingegen eignet sich ein Funktionsraum mit symmetrischem Träger gut für physikalische Anwendungen mit elliptischem Charakter, wie sie in der Strukturmechanik oder bei rein diffusiven Vorgängen vorliegen und bei denen die Informationsausbreitung isotrop ist. Jedoch ist er ungeeignet für hyperbolische Transportvorgänge und führt dort zu numerischen Oszillationen. Zur Berücksichtigung der Richtungsabhängigkeit in der Informationsausbreitung müssen die Testfunktionen entsprechend der jeweils vorherrschenden Strömungsrichtung wie bei einem *Upwinding*-Verfahren angepasst werden [Fer08]. Unter Definition des diskretisierten Residuums der Impulsbilanz ohne Lastterm als

$$\mathbf{L}(\mathbf{v}^h, p^h) = \rho \left[\frac{\partial \mathbf{v}^h}{\partial t} + \mathbf{v}^h \cdot \nabla \mathbf{v}^h \right] - \nabla \cdot \mathbf{T}(\mathbf{v}^h, p^h) \quad (3.17)$$

gelingt dies im Rahmen einer *Streamline-Upwind-Petrov-Galerkin*-Stabilisierung (SUPG-Stabilisierung) unter Hinzunahme von

$$+ \sum_{e=1}^{(N_{el})_n} \int_{Q_n^e} \tau_{\text{SUPG}} \left[\mathbf{v}^h \cdot \nabla \mathbf{w}_{\mathbf{v}}^h \right] \cdot \left[\mathbf{L}(\mathbf{v}^h, p^h) - \mathbf{f} \right] dQ \quad (3.18)$$

auf Elementebene zur Integralgleichung (3.14). Die Wichtung der residuellen Impulsbilanz mit dem konvektiven Term bewirkt, dass die Testfunktionen von ihrer symmetrischen Gestalt abweichen und ihren Verlauf der vorherrschenden Strömungsrichtung anpassen [Bro82,

Beh94, Wal99, Wal02]. Dadurch werden stromaufwärts liegende Bereiche stärker berücksichtigt, während stromabwärts liegende Gebiete einen geringeren Einfluss erfahren. Infolge der modifizierten Testfunktionen, liegt nun ein PETROW-GALERKIN-Verfahren vor, bei dem sich Test- und Interpolationsfunktionen unterscheiden [Bat02, Red06].

Neben dem Geschwindigkeitsfeld ist auch das Druckfeld von numerischen Oszillationen betroffen. Die NAVIER-STOKES-Gleichungen mit Geschwindigkeiten \mathbf{v} und Druck p als Zustandsgrößen entsprechen einer gemischten Formulierung wie sie auch bei Verwendung des Potentials nach HELLINGER-REISSNER in der Strukturmechanik als Ausgangspunkt einer generalisierten Finite-Elemente-Formulierung vorliegt [Fra88]. Im Zuge des Diskretisierungsprozesses erfordert die bei solchen Formulierungen vorliegende Sattelpunktsproblematik die Einhaltung der BABUSHKA-BREZZI-Bedingung (*inf-sup*-Bedingung), welche wesentlich die Wahl der zulässigen Ansatzordnungen zur Approximation der Zustandsgrößen bestimmt [Bre91]. Eine korrekte Abstimmung der Ansatzordnungen führt bei Hexaeder- bzw. Rechteckelementen auf das Q2Q1-TAYLOR-HOOD-Element mit einem quadratischen Geschwindigkeitsverlauf bei linearer Interpolation des Druckes [Don03]. Die mit Gleichung (3.10) für das Q1Q1-Element verwendete gleiche Ansatzordnung mit linearen Interpolationsverläufen für beide Zustandsgrößen verletzt jedoch die *inf-sup*-Bedingung. Neben der direkten Erfüllung der *inf-sup*-Bedingung (*Satisfying Babushka Brezzi*, SBB-Vorgehen) mittels korrekter Abstimmung der Ansatzordnungen kann dessen Einhaltung auch indirekt durch Hinzunahme eines zusätzlichen Terms im Rahmen einer Stabilisierung erfolgen (*Circumventing Babushka Brezzi*, CBB-Vorgehen), so dass kein expliziter Nachweis der Einhaltung der *inf-sup*-Bedingung mehr notwendig ist. Hierbei wird die residuelle Form der Impulsbilanz mit dem dem Druck zugehörigen Gradienten auf Elementebene gewichtet:

$$+ \sum_{e=1}^{(N_{el})_n} \int_{Q_n^e} \tau_{\text{SPG}} \left[\frac{1}{\rho} \nabla w_p^h \right] \cdot \left[\mathbf{L}(\mathbf{v}^h, p^h) - \mathbf{f} \right] dQ. \quad (3.19)$$

Dadurch wird der Testraum des Druckfeldes derart angepasst, dass die Ansatzordnung der das Druckfeld wichtenden Testfunktionen w_p^h erhöht wird und somit sämtliche vorhandene Druckverläufe geprüft werden können. Ein Auftreten unphysikalischer, numerischer Oszillationen wird dadurch unterbunden. Der mit Gleichung (3.19) der Integragleichung (3.14) hinzuzufügende Term stellt eine *Pressure-Stabilizing-Petrow-Galerkin*-Stabilisierung (PSPG-Stabilisierung) dar und führt infolge der Veränderung des Funktionsraumes der Testfunktionen wie auch die SUPG-Stabilisierung auf eine PETROW-GALERKIN-Formulierung.

Im Hinblick auf das sowohl in der SUPG- als auch in der PSPG-Stabilisierung enthaltende diskretisierte Residuum der Impulsbilanz ohne Lastterm (3.17) ist jedoch bei der Verwendung linearer Funktionen die Konsistenz des numerischen Verfahrens nicht mehr ohne Weiteres gewährleistet. Die linearen Interpolationsfunktionen führen dazu, dass der Spannungsterm $\nabla \cdot \mathbf{T}$ infolge der in ihm enthaltenen zweiten Ableitungen für die Geschwindigkeit entfällt. Die Gewährleistung des bei feiner werdender Diskretisierung abnehmenden Einflusses der Stabilisierungsterme (3.18) und (3.19) hat daher über die Wahl der zugehörigen Stabilisierungsparameter τ_{SUPG} und τ_{PSPG} zu erfolgen. Neben grundlegenden Arbeiten hierzu u.a. von HUGHES und FRANCA [Hug79, Fra92] basieren die im Rahmen dieser Arbeit verwendeten Stabilisierungsparameter auf [Tez92d], welche auch in [Wal02, Hüb03, Pas14, Alf16] verwendet wurden und

sich dort als äußerst robust erwiesen haben. Als Parameter zur Stabilisierung der numerischen Oszillationen im Druckfeld kommt

$$\tau_{\text{PSPG}} = \left[\left(\frac{2}{\Delta t} \right)^2 + \left(\frac{2 \|\mathbf{v}\|}{h} \right)^2 + \left(\frac{4\nu}{h^2} \right)^2 \right]^{-\frac{1}{2}} \quad (3.20)$$

zur Anwendung. Der so definierte Parameter gewährleistet neben der Konformität der physikalischen Einheiten des Stabilisierungsterms, dass mit kleiner werdender Zeitschrittweite Δt oder abnehmender Elementgröße h der Einfluss der Stabilisierung verschwindet. Als lokales Längenmaß h der Elementgröße wird hierbei der Durchmesser eines flächengleichen Kreises in Zeitscheibenmitte betrachtet. Daneben sind ν und $\|\mathbf{v}\|$ die kinematische Viskosität bzw. die Norm des Geschwindigkeitsvektors, der bei einer veränderlichen Geometrie mit sich bewegendem Beobachter als Differenzvektor zwischen tatsächlicher Strömungs- und Netzgeschwindigkeit aufzufassen ist. Nach Umformulierung lautet Gleichung (3.20) in dimensionsloser Schreibweise

$$\tau_{\text{PSPG}} = \frac{h}{2 \|\mathbf{v}\|} \left[\left(\frac{1}{\text{CFL}} \right)^2 + 1 + \left(\frac{3}{\text{Re}} \right)^2 \right]^{-\frac{1}{2}} \quad \text{mit} \quad \text{CFL} = \frac{\|\mathbf{v}\| \Delta t}{h}, \quad (3.21)$$

wodurch deutlich erkennbar wird, dass der Einfluss der Stabilisierung mit zunehmender REYNOLDS-Zahl Re ansteigt. In Anlehnung zur Definition von τ_{PSPG} erfolgt nach [Tez92d] auch die Definition des Parameters τ_{SUPG} zur Stabilisierung des Geschwindigkeitsfeldes mit

$$\tau_{\text{SUPG}} = \tau_{\text{PSPG}} \cdot \zeta(\text{Re}_e). \quad (3.22)$$

Darin wird zusätzlich zur PSPG-Stabilisierung über die Hilfsfunktion

$$\zeta_e = \begin{cases} \text{Re}_e & \text{für } \text{Re}_e < 1.0 \\ 1.0 & \text{für } \text{Re}_e \geq 1.0 \end{cases} \quad \text{mit} \quad \text{Re}_e = \frac{h \|\mathbf{v}\|}{6\nu} \quad (3.23)$$

als elementbezogener REYNOLDS-Zahl Re_e gewährleistet, dass bei ausreichend feiner Diskretisierung und damit auf Elementebene nicht mehr vorhandener Konvektionswirkung auch der Einfluss der SUPG-Stabilisierung verschwindet.

Zusätzlich zur Stabilisierung der Impulsbilanz ist zur numerischen Berechnung von Strömungen mit großen REYNOLDS-Zahlen auch eine Stabilisierung der Massebilanz vorteilhaft. Nach [Beh94] hat sich hierfür mit Fokus auf den stationären Anteil eine *Least-Squares*-Stabilisierung als geeignet erwiesen, welche der Integralgleichung (3.14) auf Elementebene hinzugefügt wird:

$$+ \sum_{e=1}^{(N_{el})_n} \int_{Q_n^e} \tau_{\text{Re}} \left[\rho \nabla \cdot \mathbf{w}_{\mathbf{v}}^h \right] \cdot \left[\nabla \cdot \mathbf{v}^h \right] dQ \quad \text{mit} \quad \tau_{\text{Re}} = \frac{1}{2} h \|\mathbf{v}\| \zeta(\text{Re}_e). \quad (3.24)$$

Der zugehörige Stabilisierungsparameter τ_{Re} berücksichtigt darin neben der Elementgröße h und der Strömungsgeschwindigkeit $\|\mathbf{v}\|$ über die Hilfsfunktion $\zeta(\text{Re}_e)$ ebenfalls den Konvektionseinfluss auf Elementebene. Entgegen dem vorteilhaften Einfluss einer *Least-Squares*-Stabilisierung bei der Massebilanz hat sich diese bei der Impulsbilanz als eher nachteilig erwiesen [Hüb03], so dass die in den Gleichungen (3.19) und (3.18) vorgestellte PSPG- und

SUPG-Stabilisierung ausreichend ist. Neben den in den Gleichungen (3.22), (3.20) und (3.24) definierten Parametern, die sich u.a. in [Wal02, Hüb03, Köl05, Pas14, Rei16] als robust und genau gezeigt haben, existieren noch weitere Verfahren zur Herleitung von Stabilisierungsparametern, die im Wesentlichen auf Matrixansätzen basieren [Tez00, Tez01, Tez03] oder im Rahmen einer variationellen Multiskalenbetrachtung erfolgen [Gra03, Gam10].

3.2.2 Matrizelle Darstellung

Nichtlineares Gleichungssystem. Das Einsetzen der mit den Gleichungen (3.12) und (3.10) definierten Test- und Interpolationsfunktionen in die schwache Form (3.14) der inkompressiblen NAVIER-STOKES-Gleichungen führt für die aktuelle Zeitscheibe Q_n^h zu einem nichtlinearen Gleichungssystem mit den Knotenfreiwerten für Geschwindigkeiten $\hat{\mathbf{v}}$ und Druck $\hat{\mathbf{p}}$ als zu bestimmende Unbekannte:

$$\left[\mathbf{K}_{\text{inst}} + \mathbf{K}_{\text{conv}}(\hat{\mathbf{v}}) + \mathbf{K}_{\text{jump}} + \mathbf{K}_{\text{visc}} \right] \cdot \hat{\mathbf{v}} - \mathbf{K}_{\nabla} \cdot \hat{\mathbf{p}} = \mathbf{r}_{\mathbf{f}} + \mathbf{r}_{\mathbf{t}} + \mathbf{r}_{\text{jump}} , \quad (3.25a)$$

$$\mathbf{K}_{\nabla}^T \cdot \hat{\mathbf{v}} = \mathbf{0} . \quad (3.25b)$$

Dabei folgt Gleichung (3.25a) aus den Termen der Impulsbilanz und Gleichung (3.25b) aus dem Term der Massebilanz, wobei die den beiden Bilanzen auf Elementebene hinzuzufügen den Stabilisierungsterme (3.18), (3.19) und (3.24) hier nicht explizit mit aufgeführt sind. Im Detail geht die Matrix \mathbf{K}_{inst} aus dem in Gleichung (3.14a) vorhandenen Anteil der lokalen Zeitableitung $\partial_t \mathbf{v}^h$, die Matrix \mathbf{K}_{conv} aus dem nichtlinearen, konvektivem Term $\mathbf{v}^h \cdot \nabla \mathbf{v}^h$ und die Matrix \mathbf{K}_{jump} aus demjenigen Anteil des Sprungterms hervor, der den Beginn t_n^+ der aktuellen Zeitscheibe Q_n^h umfasst. Daneben resultieren die Matrizen \mathbf{K}_{visc} und \mathbf{K}_{∇} aus dem in Gleichung (3.14b) aufgeführten Term des Spannungstensors \mathbf{T} nach Einsetzen von Konstitutivbeziehung (2.63) und Kinematik (2.53), wobei \mathbf{K}_{visc} den die Geschwindigkeit betreffenden Anteil $[\nabla \mathbf{v} + (\nabla \mathbf{v})^T]$ und \mathbf{K}_{∇} den Druckanteil umfasst. Als Lastvektoren gehen $\mathbf{r}_{\mathbf{f}}$ und $\mathbf{r}_{\mathbf{t}}$ aus dem Volumenlastintegral (3.14c) und dem Randlastintegral der NEUMANN-Randbedingung hervor, während \mathbf{r}_{jump} diejenigen Anteile des Sprungterms beinhaltet, die ausgehend vom Ende der vorausgegangenen Zeitscheibe Q_{n-1}^h zum Zeitpunkt t_n^- im Rahmen des zeit-diskontinuierlichen GALERKIN-Verfahrens (dGt-Verfahren) die Lösungsweitergabe an die aktuelle Zeitscheiben sicherstellt und dabei als Anfangsbedingungen in schwacher Form aufgefasst werden können. Neben der Diskretisierung der Impulsbilanz führt die Massebilanz (3.14d) ebenfalls auf die Matrix \mathbf{K}_{∇} , jedoch in ihrer transponierten Form. Insgesamt ist die Nichtlinearität der inkompressiblen NAVIER-STOKES-Gleichungen vollständig in der Matrix $\mathbf{K}_{\text{conv}}(\hat{\mathbf{v}})$ enthalten. Unter Zusammenfassung der Teilmatrizen und der einzelnen Lastvektoren zu

$$\mathbf{K}_{\mathbf{vv}} = \mathbf{K}_{\text{inst}} + \mathbf{K}_{\text{conv}}(\hat{\mathbf{v}}) + \mathbf{K}_{\text{jump}} + \mathbf{K}_{\text{visc}} , \quad (3.26a)$$

$$\mathbf{K}_{\mathbf{vp}} = -\mathbf{K}_{\nabla} \quad \text{und} \quad (3.26b)$$

$$\mathbf{r}_{\mathbf{v}} = \mathbf{r}_{\mathbf{f}} + \mathbf{r}_{\mathbf{t}} + \mathbf{r}_{\text{jump}} \quad (3.26c)$$

lässt sich die diskretisierte Form von Gleichung (3.14) als nichtlineares Gleichungssystem schreiben:

$$\left[\begin{array}{c|c} \mathbf{K}_{\mathbf{v}\mathbf{v}}(\hat{\mathbf{v}}) & \mathbf{K}_{\mathbf{v}\mathbf{p}} \\ \hline \mathbf{K}_{\mathbf{v}\mathbf{p}}^T & \mathbf{0} \end{array} \right] \bullet \left[\begin{array}{c} \hat{\mathbf{v}} \\ \hat{\mathbf{p}} \end{array} \right] = \left[\begin{array}{c} \mathbf{r}_{\mathbf{v}} \\ \mathbf{0} \end{array} \right]. \quad (3.27)$$

Dabei wird aus der Gestalt des Gleichungssystems der gemischte Charakter der NAVIER-STOKES-Gleichungen bei Formulierung in den Zustandsgrößen Geschwindigkeit \mathbf{v} und Druck p sichtbar [Bre91]. Die Matrix $\mathbf{K}_{\mathbf{v}\mathbf{p}}$ unterliegt damit der *inf-sup*-Bedingung (3.6), deren Einhaltung hier indirekt über die Hinzunahme der PSPG-Stabilisierung (3.19) gewährleistet ist. Mit Verweis auf eine Variationsformulierung, bei der die Divergenzfreiheit des Geschwindigkeitsfeldes als Nebenbedingung auftritt und die auf dieselbe Gestalt des Gleichungssystems (3.27) führt, wird ersichtlich, dass der Druck p die Eigenschaft eines LAGRANGE-Multiplikators zur Einhaltung des Massebilanz hat. Damit kann das Lösungsvorgehen bei der diskretisierten Form der NAVIER-STOKES-Gleichungen (3.27) auch als Suche nach einem Sattelpunkt einer Variationsformulierung mit Nebenbedingung aufgefasst werden, wie sie gleichfalls Bestandteil bei Optimierungsaufgaben ist [Bre74].

Linearisierung. Das nichtlineare Gleichungssystem (3.27) kann sowohl unter Anwendung eines Fixpunktverfahren wie z.B. einer PICARD-Iteration oder mittels NEWTON-RAPHSON-Verfahrens gelöst werden [Bat02]. Dem Vorteil der einfachen Umsetzung und Implementierung bei einem Fixpunktverfahren steht das stabile und robuste Verhalten des NEWTON-RAPHSON-Verfahrens mit quadratischer Konvergenz gegenüber. Zur Erzielung der nur innerhalb des Konvergenzradiuses vorhandenen quadratischen Konvergenz ist jedoch die konsistente Linearisierung sämtlicher Terme der schwachen Form (3.14), inklusive der zugehörigen Stabilisierungsterme (3.18), (3.19) und (3.24), notwendig. Dazu erfolgt die Umformulierung des nichtlinearen Gleichungssystems (3.27) in residuelle Schreibweise:

$$\mathbf{R}(\hat{\mathbf{z}}) = \left[\begin{array}{c} \mathbf{R}_{\mathbf{v}}(\hat{\mathbf{v}}, \hat{\mathbf{p}}) \\ \mathbf{R}_{\mathbf{p}}(\hat{\mathbf{v}}) \end{array} \right] = \left[\begin{array}{c} \mathbf{K}_{\mathbf{v}\mathbf{v}}(\hat{\mathbf{v}}) \cdot \hat{\mathbf{v}} + \mathbf{K}_{\mathbf{v}\mathbf{p}} \cdot \hat{\mathbf{p}} - \mathbf{r}_{\mathbf{v}} \\ \mathbf{K}_{\mathbf{v}\mathbf{p}}^T \cdot \hat{\mathbf{v}} \end{array} \right] = \mathbf{0}. \quad (3.28)$$

Ausgehend von der residuellen Form (3.28) liefert die Linearisierung des nichtlinearen Residuenvektors unter Anwendung der Richtungsableitung die Iterationsvorschrift des NEWTON-RAPHSON-Verfahrens:

$$\partial_{\hat{\mathbf{z}}} \mathbf{R}(\hat{\mathbf{z}})|_{\hat{\mathbf{z}}^{(i)}} \cdot \Delta \hat{\mathbf{z}}^{(i)} = -\mathbf{R}(\hat{\mathbf{z}}^{(i)}), \quad (3.29a)$$

$$\hat{\mathbf{z}}^{(i+1)} = \hat{\mathbf{z}}^{(i)} + \Delta \hat{\mathbf{z}}^{(i)}. \quad (3.29b)$$

Hierbei wird das Inkrement $\Delta \hat{\mathbf{z}}^{(i)}$ des i -ten Iterationsschrittes der Zeitscheibe Q_n^h , das mit $\hat{\mathbf{z}}^{(i)} = [\hat{\mathbf{v}}^{(i)} | \hat{\mathbf{p}}^{(i)}]^T$ als Zustandsvektor die Knotenfreiwerte von Geschwindigkeit und Druck zusammenfasst, durch Lösung des Gleichungssystems (3.29a) gewonnen. Darin stellt $\partial_{\hat{\mathbf{z}}} \mathbf{R}(\hat{\mathbf{z}})|_{\hat{\mathbf{z}}^{(i)}}$ als Tangentensteifigkeitsmatrix die zum i -ten Iterationsschritt zugehörige Richtungsableitung und $\mathbf{R}(\hat{\mathbf{z}}^{(i)})$ den mit den Lösungswerten $\hat{\mathbf{z}}^{(i)}$ der vorangegangenen Iteration ausgewerten Residuenvektor \mathbf{R} als Lastvektor dar. Der Lösungsvektor des i -ten Iterationsschrittes $\hat{\mathbf{z}}^{(i+1)}$ ergibt

sich dann aus Gleichung (3.29b) unter Addition des aktuellen Lösungsincrementes $\Delta \hat{\mathbf{z}}^{(i)}$ zum Zustandsvektor $\hat{\mathbf{z}}^{(i)}$ der vorausgegangenen Iteration. Die explizite Ausformulierung der Linearisierung (3.29a) liefert eine bessere Einsicht in die Struktur des für die n -te Zeitscheibe iterativ zu lösenden Gleichungssystems:

$$\left[\begin{array}{c|c} \partial_{\hat{\mathbf{v}}} \mathbf{R}_{\mathbf{v}} & \partial_{\hat{\mathbf{p}}} \mathbf{R}_{\mathbf{v}} \\ \hline \partial_{\hat{\mathbf{v}}} \mathbf{R}_{\mathbf{p}} & \partial_{\hat{\mathbf{p}}} \mathbf{R}_{\mathbf{p}} \end{array} \right] \bigg|_{(\hat{\mathbf{z}}^{(i)})} \cdot \left[\begin{array}{c} \Delta \hat{\mathbf{v}}^{(i)} \\ \Delta \hat{\mathbf{p}}^{(i)} \end{array} \right] = - \left[\begin{array}{c} \mathbf{R}_{\mathbf{v}}(\hat{\mathbf{z}}^{(i)}) \\ \mathbf{R}_{\mathbf{p}}(\hat{\mathbf{z}}^{(i)}) \end{array} \right]. \quad (3.30)$$

Neben den von der Impulsbilanz (3.14a) bis (3.14c) und Beiträgen der SUPG- sowie der REYNOLDS-Stabilisierung (3.18) bzw. (3.24) belegten Blockmatrizen $\partial_{\hat{\mathbf{v}}} \mathbf{R}_{\mathbf{v}}$ und $\partial_{\hat{\mathbf{p}}} \mathbf{R}_{\mathbf{v}}$ folgt die Matrix $\partial_{\hat{\mathbf{v}}} \mathbf{R}_{\mathbf{p}}$ sowohl aus der Massebilanz (3.14d) als auch aus der PSPG-Stabilisierung (3.19). Lediglich die Teilmatrix $\partial_{\hat{\mathbf{p}}} \mathbf{R}_{\mathbf{p}}$ sowie der Residuenvektor $\mathbf{R}_{\mathbf{p}}(\hat{\mathbf{z}}^{(i)})$ verbleiben stets identisch Null, so dass der Charakter einer gemischten Formulierung auch nach der Linearisierung erhalten bleibt.

Die Lösung des linearen Gleichungssystems (3.30) kann sowohl iterativ als auch direkt vorgenommen werden. Im Hinblick auf die unsymmetrische Gestalt der Tangentensteifigkeitsmatrix $\partial_{\hat{\mathbf{z}}} \mathbf{R}(\hat{\mathbf{z}})|_{\hat{\mathbf{z}}^{(i)}}$ können dafür u.a. als iterative Lösungsverfahren das BiCGStab- oder gmres-Verfahren zum Einsatz kommen. Bei iterativen Lösungsverfahren wird jedoch in jedem Fall der Lösungsaufwand und das Konvergenzverhalten stark von der Wahl des Vorkonditionierers beeinflusst, dessen Wahl eng im Zusammenhang mit dem betrachteten physikalischen Anwendungsbereich steht. Eine schlechte Vorkonditionierung kann neben dem deutlichen Abweichen vom optimalen Konvergenzverhalten sich sogar nachteilig bis hin zur Divergenz des iterativen Lösungsverfahrens auswirken. Demgegenüber ist die direkte Lösung des Gleichungssystems wesentlich robuster und unabhängig vom betrachteten Anwendungsbereich. Nachteilig sind jedoch der mit zunehmender Systemgröße überproportional ansteigende Rechen- und Speicheraufwand von $\mathcal{O}(r^2 n)$ in Abhängigkeit der Bandbreite r und Unbekanntenanzahl n der Tangentensteifigkeitsmatrix. Da im Rahmen dieser Arbeit der Fokus auf der Untersuchung der Strömungsvorgänge bei Schütz und Wasserrad auf unterschiedlichen und vorwiegend komplexen Gebieten in verschiedenen Strömungszuständen liegt, erfolgt die Lösung von Gleichung (3.30) direkt, so dass die Abhängigkeiten vom physikalischen Geschehen und die damit verbundenen Schwierigkeiten bei Verwendung iterativer Lösungsverfahren umgangen werden können. Die Begrenzung der Diskretisierungsgröße wird damit in Kauf genommen. Jedoch hat die Untersuchung der Schützüberströmung in Abschnitt 4.3 gezeigt, dass unter Berücksichtigung der schwach besetzten Speicherstruktur und diagonalen Bandbreitengestalt der Tangentensteifigkeitsmatrix noch Gleichungssysteme mit über 300 000 Unbekannten berechenbar sind.

3.2.3 Nischenströmung

Allgemeines. Zur Verifikation des in den beiden vorangegangenen Abschnitten beschriebenen Q1Q1-Raum-Zeit-Elementes mit SUPG-/PSPG-Stabilisierung für die Untersuchung inkompressibler, viskoser Fluide auf Basis der NAVIER-STOKES-Gleichungen erfolgt die Berechnung des Strömungsfeldes in einem überströmten Hohlraum (engl. *lid driven cavity flow*). Neben dem *Benchmark*-Charakter dieses Berechnungsbeispiels, das zu einer Vielzahl an theoretischen, experimentellen und numerischen Untersuchungen geführt hat, treten derartige Strömungsfelder auch in industriellen Anwendungen wie z.B. im Zuführungsbereich des Versiegelungsmaterials bei Beschichtungsverfahren auf. Die Nischenströmung stellt aufgrund ihrer einfachen Geometrie mit eindeutigen Rand- und Anfangsbedingungen bei gleichzeitigem Auftreten einer Vielzahl an charakteristischen Strömungsphänomenen das klassische Testbeispiel der numerischen Strömungsberechnung dar [Ghi82, Zie14b, Don03]. Neben eindeutig identifizierbaren Haupt- und Sekundärströmungseffekten mit zwei- und auch dreidimensionalem Charakter liegen sowohl stationäre als auch instationäre Lösungen vor, bei denen die REYNOLDS-Zahl Re der einzige das Strömungsgeschehen bestimmende dimensionslose Parameter ist. Dabei zeigen neben hydrodynamischen Stabilitätsanalysen auch experimentelle Untersuchungen, dass mit zunehmender REYNOLDS-Zahl die Strömungsfelder sowohl weder eben noch stationär bleiben als auch Transition einsetzen kann und damit sich das Gesamtgebiet oder auch nur Teilbereiche in einem turbulenten Strömungszustand befinden können [Kos84]. Darüber hinaus haben sowohl numerische als auch experimentelle Untersuchungen den nichtlinearen Charakter der Nischenströmung offengelegt, indem sie belegen konnten, dass bei höheren REYNOLDS-Zahlen mit $Re \geq 1000$ sich bei gleichen Randbedingungen unterschiedliche Strömungszustände einstellen können, so dass die Eindeutigkeit der Lösung nicht mehr gewährleistet ist [Sha00]. Daraus hat sich eine umfangreiche Diskussion sowohl zur Zeitabhängigkeit und zum räumlichen Charakter der Lösungen als auch im Hinblick auf ihre Stabilität und Eindeutigkeit entwickelt [Ert09]. Insgesamt lässt sich zusammenfassen, dass der Charakter der Nischenströmung prinzipiell dreidimensional ist, wobei der Einfluss der seitlichen Ränder auf die Mittelebene mit zunehmender Ausdehnung der Nische abnimmt, wenn auch nicht vollständig verschwindet. Des Weiteren sind nur Strömungszustände mit geringen REYNOLDS-Zahlen mit $Re \leq 1000$ wirklich stationär, während alle stationären Lösungen von Zuständen mit größeren REYNOLDS-Zahlen einen prinzipiell fiktiven Charakter haben. Auch erschwert der nichtlineare Charakter der zugrundeliegenden Modellgleichungen bei höheren REYNOLDS-Zahlen ab $Re > 1000$ eine vollständig identische Reproduktion des Lösungsfeldes, da der Lösungsraum zunehmend komplexer wird und die Auswahl des physikalisch korrekten Lösungsvektors sehr sensitiv von der gewählten Vernetzung abhängt [Sch83]. Dennoch hat sich die Nischenströmung als numerischer *Benchmark* etabliert, da unter Vernachlässigung der Frage, ob die berechnete Lösung physikalisch korrekt und tatsächlich stationär ist, bei eindeutigen Rand- und Anfangsbedingungen eine gute Einordnung des angewendeten numerischen Verfahrens im Hinblick auf Genauigkeit und Stabilität der berechneten Lösung möglich ist.

Berechnungsgebiet. Um sowohl den räumlichen Charakter der Nischenströmung zeigen als auch den Vergleich mit der von GHIA ET AL. [Ghi82] für die Mittelebene berechneten Referenzlösung führen zu können, wird sowohl die in Abbildung 3.4a dargestellte dreidimensionale Nische als auch ihre in Abbildung 3.4b zugehörige Mittelebene diskretisiert. Dabei erfolgt

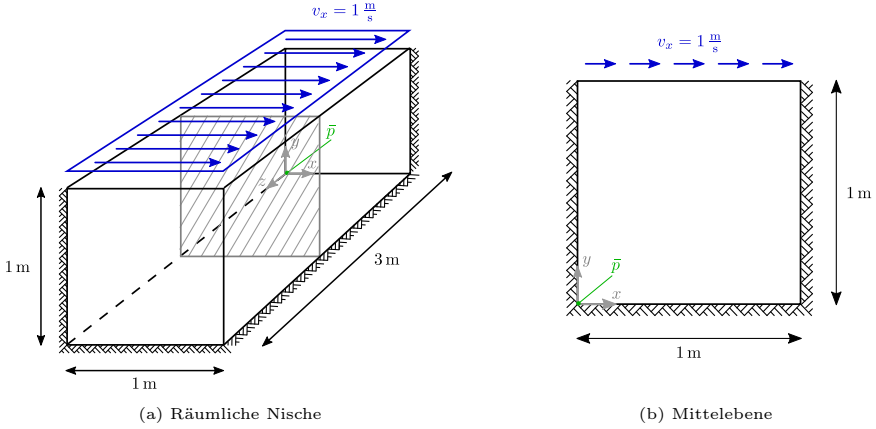
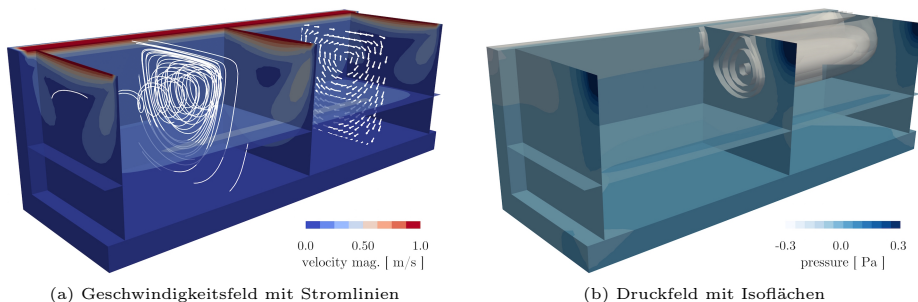


Abb. 3.4: Berechnungsgebiet mit Randbedingungen

die räumliche Diskretisierung mit $20 \times 20 \times 60$ 8-Knoten-Rechteckelementen, während das zweidimensionale Gebiet in Anlehnung an [Ghi82] gleichförmig mit 129×129 4-Knoten-Elementen für $Re \leq 1000$ bzw. 257×257 für $Re > 1000$ diskretisiert ist. Für beide Geometrien sind an allen Rändern außer dem oberen *no-slip*-Randbedingungen gesetzt, während am oberen Rand eine konstante Strömung mit $\bar{v}_x = 1 \text{ m/s}$ das Strömungsfeld in der Nische hervorruft und im Ursprung dafür das Druckniveau mit $\bar{p} = 0 \text{ N/m}^2$ festgelegt wird. Die Aufnahme der Eckknoten in das Gebiet der *no-slip*-Randbedingungen stellt ihre *non-leaky*-Variante dar und führt zur Ausbildung von Singularitäten im Strömungsfeld, welche jedoch aufgrund ihrer nur lokalen Auswirkung vorwiegend von theoretischem Interesse bleiben. Unter Variation der dynamischen Viskosität μ bei konstanter Dichte $\rho = 1 \text{ kg/m}^3$ erfolgt die Einstellung verschiedener, über die REYNOLDS-Zahl mit $Re = (\bar{v} D)/\nu$ gekennzeichneten Strömungszustände. Dabei werden die Randgeschwindigkeit \bar{v}_x und die Tiefe der Nische mit $D = 1 \text{ m}$ als charakteristischer Geschwindigkeit bzw. Länge festgelegt. Im Laufe der Berechnung gilt der stationäre Zustand als erreicht, wenn die bezogenen Lösungssinkremente von Geschwindigkeits- und Druckfeld unterhalb des Abbruchkriteriums von $\epsilon_{\text{tol}} \leq 1 \times 10^{-8}$ verbleiben. Dabei ist im dreidimensionalen Fall jeweils ein Gleichungssystem mit 161 406 Unbekannten und für den ebenen Fall mit 101 400 bei $Re \leq 1000$ bzw. bei $Re > 1000$ von 399 384 Unbekannten zu lösen.

Räumliche Strömung. Für die in Abbildung 3.4a dargestellte Geometrie, die derjenigen in [Sha00] entspricht, wird der stationäre Strömungszustand für $Re = 100$ innerhalb des dreidimensionalen, überströmten Hohlraumes berechnet. Die zugehörigen Strömungsfelder sind in Abbildung 3.5 dargestellt. In Übereinstimmung mit den numerischen und experimentellen Untersuchungen von SHANKAR & DESHPANDE [Sha00] sowie von KOSEFF & STREET [Kos84] geben die Stromlinien in Abbildung 3.5a den räumlichen Charakter des Geschwindigkeitsfeldes wieder, der sich mit zunehmendem Abstand von der Mittelebene stärker ausprägt. Daneben

Abb. 3.5: Räumliche Nischenströmung, $Re = 100$

entspricht das Geschwindigkeitsprofil der Mittelebene demjenigen, das auch von GHIA ET AL. [Ghi82] im rein ebenen Zustand berechnet wurde. Auf den randnahen Schnittebenen wird der verzögernde Einfluss der Seitenwände erkennbar, der das Geschwindigkeitsfeld im Vergleich zur Mittelebene beeinflusst und insbesondere im tieferen Bereich deutlich verlangsamt. Die dadurch ebenfalls entstehenden vertikal ausgeprägten Eckwirbel sind hier nicht visualisiert. Auch im Druckfeld in Abbildung 3.5b ist der Randeinfluss erkennbar. Ausgehend von der um den Wirbelmittelpunkt nahezu kreisförmigen Druckverteilung in der Mittelebene verzüngen sich die Isoflächen hin zu den Randbereichen, in denen infolge der geringeren Strömungsgeschwindigkeit auch der Wirbel weniger stark ausgeprägt ist. Die von den unstetigen *non-leaky*-Randbedingungen hervorgerufenen singulären Störungseffekte überlagern dabei lokal in den oberen Eckbereichen das eigentliche Druckfeld. Insgesamt kann beobachtet werden, dass das Strömungsfeld im überströmten Hohlraum prinzipiell einen räumlichen Charakter besitzt und die Bewegung der Fluidpartikel zwischen verschiedenen Wirbelstrukturen möglich ist, da im dreidimensionalen keine geschlossenen Stromlinien vorliegen, die einzelne Gebiete voneinander abgrenzen. Dabei nimmt der Einfluss der seitlichen Ränder mit zunehmendem Abstand ab, so dass das Strömungsfeld in der Mittelebene einen vorwiegend ebenen Charakter aufweist.

Veränderliche REYNOLDS-Zahl. Mit zunehmender REYNOLDS-Zahl verändert sich das Strömungsfeld und insbesondere die dabei auftretenden Wirbelstrukturen. Die von GHIA ET AL. durchgeführten numerischen Untersuchungen für den in Abbildung 3.4b dargestellten ebenen Zustand unter Verwendung einer DNS gelten dafür als Referenzlösung [Ghi82]. Für den Wertebereich von $100 \leq Re \leq 10\,000$ wurden verschiedene Strömungszustände mit dem vorgestellten stabilisierten Q1Q1-Element berechnet, von denen in Abbildung 3.6 für die Zustände $Re = 100, 1000, 5000$ und $10\,000$ die zugehörigen Geschwindigkeitsfelder mit überlagerten Stromlinien zur Kennzeichnung der Wirbelstrukturen dargestellt sind. Dabei entspricht für den Zustand $Re = 100$ das Geschwindigkeitsfeld in Abbildung 3.5a nahezu vollständig demjenigen der Mittelebene in Abbildung 3.5a. Deutlich erkennbar ist der ausgeprägte, fast das gesamte Gebiet einnehmende Hauptwirbel. Lediglich in der unteren rechten Ecke befindet sich ein kleiner Nebenwirbel. Mit zunehmender REYNOLDS-Zahl vergrößert sich der Eckwirbel und

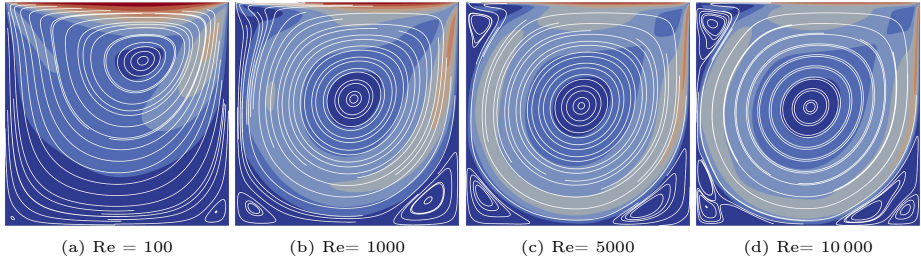


Abb. 3.6: Veränderliche Re-Zahl, Geschwindigkeitsfeld mit Stromlinien

in der unteren linken Ecke bildet sich ein weiterer Nebenvirbel, während das Zentrum des Hauptwirbels in Richtung der geometrischen Mitte des Berechnungsgebietes wandert (Abbildung 3.6b). Im Zustand $Re = 5000$ (Abbildung 3.6c) besitzen die beiden Eckwirbel nahezu die gleiche Größe, während sich in der oberen linken Ecke ein weiterer Nebenvirbel begonnen hat auszubilden. Bei weiterer Steigerung der REYNOLDS-Zahl bis zum Zustand $Re = 10000$ sind damit die Bereiche festgelegt, in denen sich neben dem Hauptwirbel Sekundärströmungen mit Nebenvirbeln ausbilden. Dabei kommt es zur Aufspaltung der unteren Eckwirbel in eine Serie von Wirbelstrukturen mit abnehmender Größe (Abbildung 3.6d). Hierbei entspricht die Aufspaltung des linken unteren und oberen Eckwirbels nicht vollständig den Berechnungsergebnissen von GHIA ET AL. und deutet darauf hin, dass trotz identischer Netzgeometrie ein anderer Lösungsvektor berechnet wurde. Gemeinsam ist jedoch sowohl dem von GHIA ET AL. als auch dem in Abbildung 3.6d dargestellten Lösungszustand, dass sie nur als fiktive Strömungszustände gelten können, da kein Strömungszustand mit $Re > 1000$ physikalisch als stationär und eben anzusehen ist. Die Gegenüberstellung der Geschwindigkeitsprofile entlang der vertikalen und horizontalen Mittelachsen in Abbildung 3.7 zeigt jedoch für alle vier Zustände sowohl für die horizontale als auch die vertikale Geschwindigkeitskomponente eine nahezu vollständige Übereinstimmung mit den Berechnungsergebnissen von GHIA ET AL., die dort mittels Symbolen gekennzeichnet sind, während die berechneten Ergebnisse gestrichelt verlaufen.

Geometrievariation. In Erweiterung des Berechnungsbeispiels von GHIA ET AL. ist die Geometrie der überströmten Nische variiert worden. Bei der in Abbildung 3.8 dargestellten Breitenvariation wird erkennbar, dass der untere linke Eckwirbel zuerst deutlich anwächst und eine nahezu gleiche vertikale Ausdehnung wie der Hauptwirbel erlangt, wobei seine Breite stark reduziert bleibt (Abbildung 3.8a). Mit weiter zunehmender Breite jedoch überlagert der stets im Oberstrombereich verbleibende Hauptwirbel den kleiner werdenden Nebenvirbel (Abbildung 3.8b), bis dieser bei stark länglicher Geometrie schließlich den Charakter eines Bodenwirbels im unmittelbaren Abstrombereich des Hauptwirbels annimmt (Abbildung 3.8c). Neben der Variation der Breite ist in Anlehnung an [Sha00] auch die Tiefe des Berechnungsgebietes variiert worden. Die in Abbildung 3.9 dargestellte Serie in die Tiefe ausbreitende Serie von gegensinnig drehenden Wirbelstrukturen stimmt dabei sowohl mit den mittels Eigenwert-

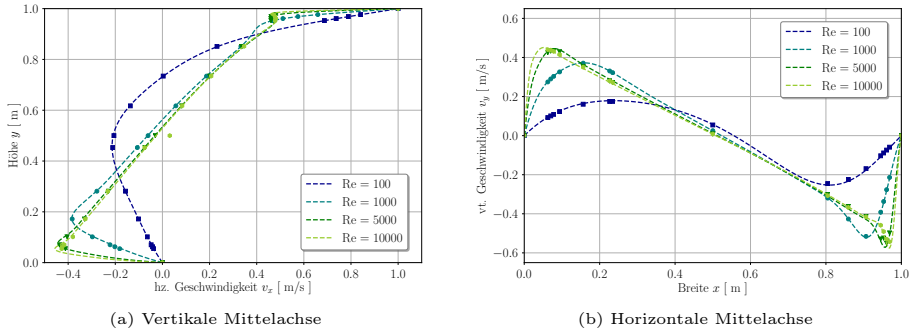
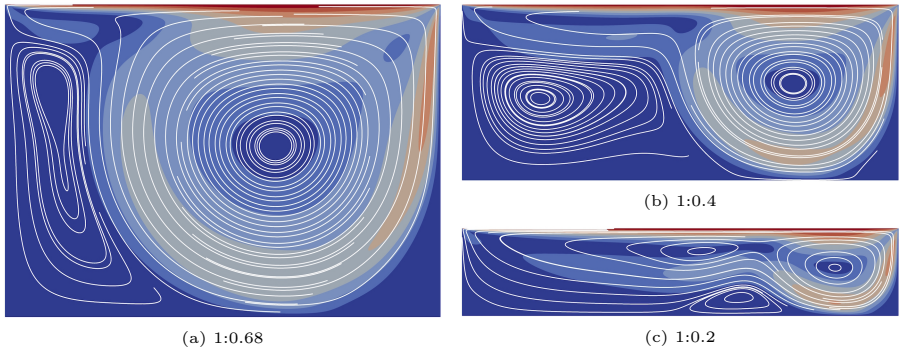


Abb. 3.7: Veränderliche Re-Zahl, Geschwindigkeitsprofile

analyse gewonnen theoretischen Erkenntnissen als auch mit den experimentellen Ergebnissen von SHANKAR & DESHPANDE überein. Prinzipiell setzt sich die Wirbelserie unendlich in die Tiefe fort, jedoch verlangsamt sich ihre Ausbreitung mit zunehmender Tiefe deutlich, was den Berechnungsaufwand mit jeder weiteren Ebene erheblich erhöht. Lediglich in der obersten Wirbelebene ist das Geschwindigkeitsfeld von der aufgeprägten Randströmung sichtbar beeinflusst. Wie auch bei der Variation der Breite spielt auch bei der Tiefenvariation der untere linke Eckwirbel eine besondere Rolle, da sich aus ihm der Hauptwirbel der nächst tieferen Ebene entwickelt.


Abb. 3.8: Geometrievvariation (Breite), Geschwindigkeitsfeld mit Stromlinien, $Re = 2000$

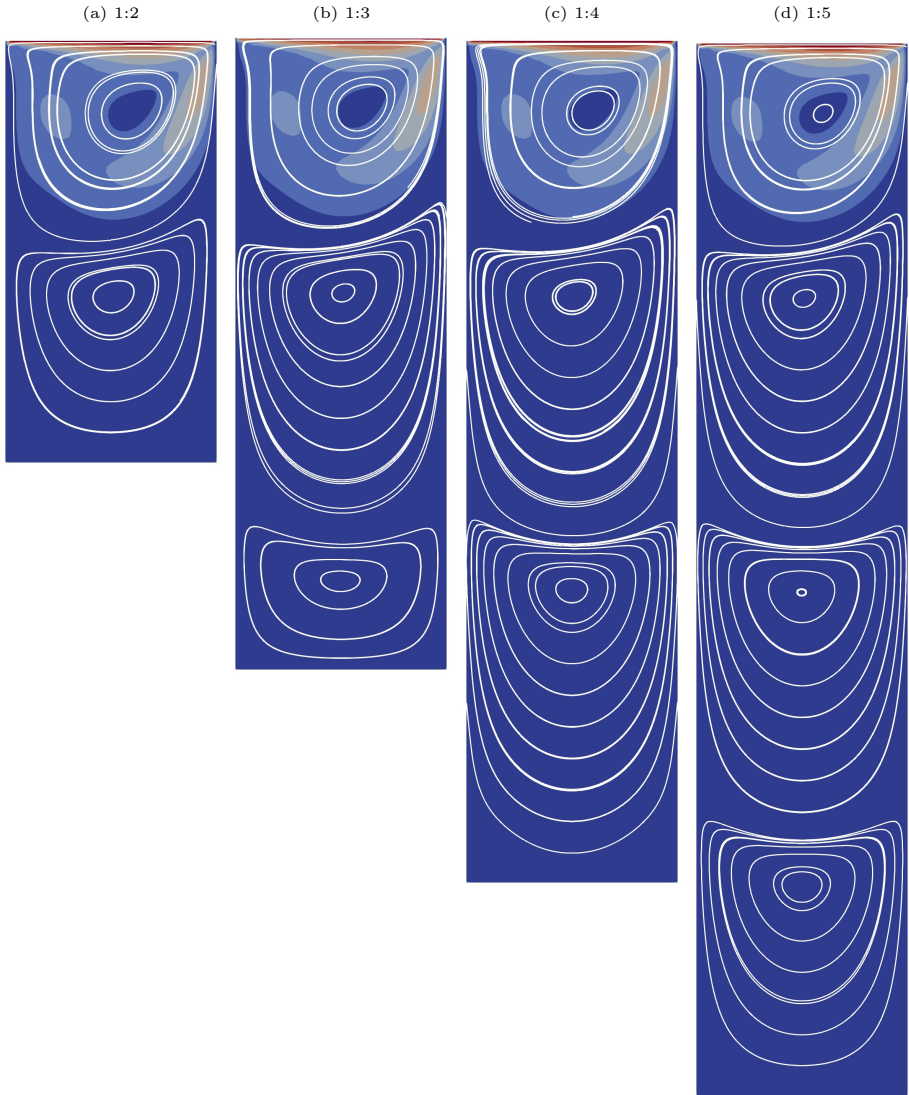


Abb. 3.9: Geometrievariation (Tiefe), Geschwindigkeitsfeld mit Stromlinien, $Re = 200$

3.3 2-Phasen-Strömungen

Ist das betrachtete Strömungsgebiet von mehr als einer Fluidphase belegt, so tritt zusätzlich zu den für beide Fluidphasen maßgebenden Strömungscharakteristiken mit ihren eigenen räumlichen und zeitlichen Skalen die Interaktion beider Phasen über ihre Grenzfläche hinzu. Dies erhöht in nicht unerheblichem Maße die Komplexität bei der Beschreibung des Strömungsgeschehens. Für die im Rahmen dieser Arbeit in den Abschnitten 4.3 und 5.3 näher untersuchten Strömungsvorgänge an Schütz und Wasserrad führt die oberflächengekoppelte Interaktion von Wasser- und Luftphase zu deutlichen und nicht abschätzbaren morphologischen und topologischen Veränderungen der Grenzfläche. Daher können die in Abschnitt 2.1.3 angesprochenen klassischen Verfahren zur Modellierung von Mehr-Phasen-Strömungen, welche im Wesentlichen auf Mittelungsansätzen beruhen, nicht angewendet werden. Bei ihnen wäre *a priori* eine Kenntnis über Gestalt und vorherrschende Wechselwirkung zwischen beiden Phasen notwendig, wie sie z.B. für bestimmte Blasenströmungen in Rohrleitungen formulierbar ist [Bre05]. Stattdessen lässt die Interaktion von Wasser- und Luftphase an Schütz und Wasserrad mit ihren vielfältigen Lufteinschlüssen, Blasenformen und kollabierenden Wellenfronten keine vereinfachenden Annahmen über die Grenzflächenlage bzw. ihre Gestalt und das damit verbundene Strömungsgeschehen der 2-Phasen-Strömung zu. Zur Beschreibung der Dynamik der Wasser-Luft-Grenzfläche können daher hierbei nur solche Verfahren Verwendung finden, die ohne zusätzliche Annahmen die Grenzflächenbewegung beschreiben. Diese allgemeinen Verfahren werden als Grenzflächenauflösungsverfahren (*interface resolving methods*) bezeichnet und basieren in der Regel auf den NAVIER-STOKES-Gleichungen unter zusätzlicher direkter Bewegungsbeschreibung der topologischen Grenzflächenentwicklung [Wör03, Pro09]. Gegenüber den in Abschnitt 2.1.3 genannten, auf Mittelungsansätzen basierenden Verfahren zur Beschreibung von Mehr-Phasen-Strömungen wird die Freiheit der Beschreibung beliebiger Grenzflächenentwicklungen bei Verwendung von Grenzflächenauflösungsverfahren mit einem erhöhten Lösungsaufwand erkauft, da die Bewegungsbeschreibung Teil des Lösungsprozesses wird. Zusätzlich stellt die Grenzfläche im Hinblick auf die physikalischen Größen, insbesondere die Materialparameter, eine Unstetigkeitsfläche dar, die mathematisch entsprechend aufwendig zu handhaben ist. Zwar kommt es bei der Verwendung von numerischen Lösungsverfahren im Allgemeinen mit zunehmender Berechnungszeit zu einer Glättung der Unstetigkeit, jedoch ist diese zur Erhaltung der jeweiligen Fluideigenschaften mittels entsprechender mathematischer Verfahren stets wiederherzustellen.

3.3.1 Beschreibungsmöglichkeiten.

Die Grenzflächenauflösungsverfahren, welche zur Anwendung kommen, wenn die vorliegende Strömungscharakteristik einer 2-Phasen-Strömung keine Aussage über die vorherrschende Gestalt sowie die erwartbaren Form- und Lageänderungen der Grenzfläche ermöglicht, können in zwei Kategorien unterteilt werden [Tez06, Elg15]. Zum einen kann die Bewegung der Grenzfläche explizit mittels sog. Grenzflächenverfolgungsverfahren (*interface tracking methods*) beschrieben werden, bei denen direkt die Bewegung der sich auf der Grenzfläche befindenden Punkte erfasst wird. Zum anderen können sog. Volumenverfolgungsverfahren (*volume tracking methods*) verwendet werden, bei denen der Fokus auf der Kennzeichnung der beteiligten Mate-

riale Gebiete liegt und bei denen über die Betrachtung der zeitlichen Veränderung der jeweiligen Gebiete auch die Grenzflächendynamik implizit erfasst wird. Im Gegensatz zu expliziten Verfahren ist bei impliziten Verfahren die Abbildung von Gebietsvereinigungen und -trennungen, wie sie z.B. bei kollabierenden Wellenfronten und aufsteigenden Blaseneinschlüssen stattfinden, ohne zusätzlichen Aufwand möglich. Beiden Verfahrensarten ist jedoch gemein, dass sie den bisherigen Satz der das Strömungsgeschehen beschreibenden Modellgleichungen erweitern und zusätzlicher Ansätze zur Beschreibung der an der Grenzfläche stattfindenden physikalischen Prozesse bedürfen.

Grenzflächenbeschreibung. Die Grenzfläche Σ , welche zwei aneinandergrenzende Fluidphasen mit ihren materiellen, räumlichen Gebieten Ω_w und Ω_a voneinander trennt, ist definiert als die Schnittmenge der zugehörigen geschlossenen Gebiete $\Sigma = \overline{\Omega_w} \cap \overline{\Omega_a}$ und setzt sich aus den zugehörigen materiellen Punkten $\tilde{\mathbf{x}} \in \Sigma$ zusammen. Sie ist der geometrische Ort, an dem bei oberflächengekoppelten Prozessen die Interaktion der beiden Fluidphasen stattfindet. Dabei wird die Dynamik der Grenzfläche über die Bewegung der Punkte $\tilde{\mathbf{x}}$ beschrieben. Die Geschwindigkeit $\tilde{\mathbf{v}}$ der Grenzflächenpartikel leitet sich direkt aus ihrer Positionsänderung in LAGRANGEScher Betrachtungsweise ab, so dass die Grenzflächendynamik unmittelbar mittels

$$\frac{d\tilde{\mathbf{x}}}{dt} = \tilde{\mathbf{v}} \quad \text{mit} \quad \tilde{\mathbf{x}} \in \Sigma \quad (3.31)$$

gegeben ist. Im Allgemeinen erfolgt die Lösung von Gleichung (3.31) unter Verwendung numerischer Näherungsverfahren, da die Bestimmung der Geschwindigkeit der Grenzflächenpartikel die Lösung der NAVIER-STOKES-Gleichungen (2.64) bzw. (3.14) zur Ermittlung des Geschwindigkeitsfeldes der Strömung erfordert. Des Weiteren sind im Anschluss an die Positionsbestimmung der Grenzflächenpartikel sowohl die Topologie der Grenzfläche als in der Regel auch die von ihr abgeleiteten Geometrieminformationen wie Normale und Krümmung unter Hinzunahme eines Grenzflächenauflösungsverfahrens zu rekonstruieren. Diese lassen sich in explizite und implizite Verfahren unterteilen

Explizite Verfahren. Die Beschreibung der Grenzflächendynamik erfolgt bei expliziten Verfahren über direkte Bewegungsverfolgung der sich auf der Grenzfläche befindenden Punkte. Am häufigsten kommt hierfür die Methode der bewegten Netze zur Anwendung, bei der die Knoten des Berechnungsnetzes mit den Punkten auf der Grenzfläche übereinstimmen, so dass die Grenzfläche explizit als Menge von Elementkanten diskretisiert vorliegt [Elg15]. Dabei bewegen sich die Knoten auf der Grenzfläche entsprechend der zugehörigen Partikelgeschwindigkeit, weshalb die in Abschnitt 2.3.1 hergeleiteten Grundgleichungen in ALE-Betrachtungsweise verwendet werden müssen und die Hinzunahme eines Netzbewegungsalgorithmus nach Abschnitt 3.4.1 notwendig wird. Treten Gebietsvereinigungen oder -trennungen auf, so ist eine berechnungstechnisch aufwendige Neuvernetzung mit anschließender Lösungsprojektion unumgänglich. Die entlang der Elementkanten diskret abgebildete Grenzfläche trennt scharf die unterschiedlichen Materialgebiete und ermöglicht unproblematisch einen unstetigen Verlauf der Materialparameter. Eine Darstellung der Verwendung von expliziten Netzbewegungsverfahren bei 2-Phasen-Strömungen im Zusammenhang mit Raum-Zeit-Formulierungen findet

sich u.a. in [Joh94] und [Beh01a]. Neben der Verwendung bewegter Netze als explizites Verfahren zur Grenzflächenverfolgung kommen in Abhängigkeit des betrachteten Anwendungsfalls auch Markerpartikel [Try01] oder Randintegralmethoden [Bir01] zur Anwendung.

Implizite Verfahren. Gegenüber expliziten Verfahren erfolgt bei impliziten Verfahren keine unmittelbare Bewegungsverfolgung der Grenzflächenpartikel. Stattdessen werden unter Verwendung einer Hilfsgröße die Raumpunkte den jeweiligen Materialgebieten zugeordnet und die Grenzfläche ergibt sich implizit, ggf. unter Verwendung eines Rekonstruktionsalgorithmus, über die Fluidbelegung des Raumes. Dabei führt dann die Betrachtung der zeitlichen Entwicklung der Hilfsgröße indirekt auf die Lage- und Gestaltänderung der Grenzfläche, wobei problemlos große topologische und morphologische Veränderungen der Grenzfläche, wie sie bei Gebietsvereinigungen und -teilungen auftreten, erfasst werden können. Die bekanntesten und gebräuchlichsten impliziten Verfahren sind die *Marker-and-Cell-Methode* von HARLOW und WELCH, die *Volume-of-Fluid-Methode* von HIRT und NICHOLS sowie die *Level-Set-Methode* von OSHER und SETHIAN [Pro09, Pas14, Köl05, Elg15].

Bei der heute nur noch historische Bedeutung habenden *Marker-and-Cell-Methode* werden die unterschiedlichen Materialgebiete mittels masseloser Markerpartikel identifiziert [Har65]. Diese dienen ausschließlich zur Kennzeichnung der räumlichen Materialverteilung und tragen selbst keine physikalischen Informationen. Der Transport der Markerpartikel erfolgt mit der an den Partikeln vorliegenden Strömungsgeschwindigkeit in LAGRANGEScher Betrachtungsweise, so dass es lokal zu Ausdünnungen oder Anhäufungen kommen kann, die ein kontinuierliches Hinzufügen bzw. Entfernen von Markerpartikeln erfordert. Sowohl Grenzflächenlage und -gestalt als auch die davon abgeleiteten geometrischen Informationen wie Normale und Krümmung müssen stets anhand der Position und Verteilung der Markerpartikel nachträglich rekonstruiert werden. Aufgrund des steten Nachführens von Markerpartikeln als auch des notwendigen Rekonstruktionsschrittes zur Gewinnung der Grenzflächenlage kommt die *Marker-and-Cell-Methode* heute nicht mehr zum Einsatz.

Anstelle diskreter Markerpartikel verwendet die *Volume-of-Fluid-Methode* eine das gesamte Gebiet abdeckende, unstetige, skalarwertige Fraktionsfunktion ψ , welche in der Lage ist, zwei Fluidgebiete voneinander zu unterscheiden [Hir81]. Im Allgemeinen wird für die eine Fluidphase $\psi = 1$ und für die andere $\psi = 0$ gesetzt, so dass zwischen jedem Fluidpartikel und der Fraktionsfunktion eine direkte Beziehung besteht und damit der Fraktionswert eine unveränderbare Materialeigenschaft eines Fluidpartikels darstellt. Aus der Tatsache, dass ein Fluidpartikel seine Materialeigenschaft im Laufe der Zeit nicht ändern kann, also $d\psi/dt = 0$ für ihn gilt, folgt nach Überführung in die EULERSche Betrachtungsweise die Transportgleichung der Fraktionsfunktion

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \psi = 0. \quad (3.32)$$

Aufgrund des direkten Zusammenhanges zwischen Fraktionsfunktion und Materialeigenschaft wird die Masse der einzelnen Fluidgebiete bei Verwendung konservativer numerischer Verfahren erhalten. Nicht erhalten wird hingegen meist die ursprüngliche Unstetigkeit der Fraktionsfunktion an der Grenzfläche bei Verwendung numerischer Berechnungsverfahren, so dass am Ende des Zeitschrittes ein nachgeschalteter Korrekturschritt zur Wiederherstellung der Unstetigkeit notwendig ist. Demgegenüber werden die in direkter Abhängigkeit zur Fraktions-

funktion stehenden Materialparameter in der Regel von Beginn an nicht unstetig beschrieben, sondern in der unmittelbaren Umgebung der Grenzfläche regularisiert, so dass weiterhin eine Auswertung der Gebietsintegrale möglich ist. Eine vollständige Unstetigkeit, sowohl in der Fraktionsfunktion als auch in den Materialparametern, würde zu deutlichen numerischen Schwierigkeiten führen. Darüber hinaus wird stets ein nachgeschaltetes Rekonstruktionsverfahren benötigt, das aus dem Wertefeld der Fraktionsfunktion die tatsächliche Grenzflächenform sowie die davon abgeleiteten Geometriegrößen (Normale, Krümmung) ermittelt. Der Fraktionswert selbst gibt lediglich den prozentualen Anteil des an einem Raumpunkt bzw. in einem Kontrollvolumen vorhandenen Materials an. Die Lage der Grenzfläche, insbesondere über Elementkanten hinweg, ist aus dem Fraktionswert selbst nicht ersichtlich. Für strukturierte Vernetzungen gibt es deshalb verschiedene Rekonstruktionsverfahren, die jedoch nicht oder nicht vollständig auf unstrukturierte Vernetzungen, speziell im dreidimensionalen, übertragbar sind [Elg15].

Die bei der *Volume-of-Fluid-Methode* mathematisch schwierig zu fassende Unstetigkeit der Fraktionsfunktion im Zusammenspiel mit einer ohnehin geglätteten Beschreibung der Materialparameter sowie der Notwendigkeit einer steten Rekonstruktion der Grenzflächenlage haben zur Entwicklung der *Level-Set-Methode* geführt [Osh88]. Gegenüber der unstetigen Fraktionsfunktion kommt bei der *Level-Set-Methode* ebenfalls eine skalare, aber stetige Funktion zur Anwendung, über deren Null-Isokontur implizit die Grenzfläche definiert wird. Die Gebietsunterscheidung erfolgt dabei nur anhand des Vorzeichens der *Level-Set-Funktion*, so dass mangels des direkten Zusammenhangs zwischen Funktionswert und Fluidpartikel die Masseerhaltung nicht mehr *a priori* gegeben ist, sondern zusätzlicher Verfahrensschritte bedarf. Dieser Nachteil wird jedoch aufgewogen durch die unmittelbare Verfügbarkeit und der sich damit bietenden Flexibilität im Einsatzbereich einer auch über die Elementkanten hinweg stetigen Grenzflächenlage und -form sowie den daraus direkt ableitbaren Geometrieinformationen.

3.3.2 Level-Set-Methode

Allgemeines. Die *Level-Set-Methode* als implizites Grenzflächenauflösungsverfahren wurde 1988 von OSHER und SETHIAN erarbeitet und seitdem fortlaufend weiterentwickelt [Osh88, Set99, Osh01, Set03, Osh03]. Sie ist in der Lage selbst große Lage- und Formänderungen der Grenzfläche zu beschreiben und damit besonders zur Beschreibung von 2-Phasen-Strömungen geeignet, bei denen vorab keine Kenntnis über Gestalt und Entwicklung der Grenzfläche besteht. Im Rahmen der *Level-Set-Methode* wird eine stetige Funktion auf dem gesamten Gebiet definiert, deren Null-Isokontur die Grenzfläche beider Fluidphasen markiert. Dabei erfolgt die Zuordnung der Materialgebiete zu den Fluidphasen anhand des Vorzeichens der *Level-Set-Funktion*. Die *Level-Set-Funktion* wird definiert als vorzeichenbehaftete Abstandsfunktion, die an jedem Punkt die kürzeste Entfernung zur Grenzfläche angibt und durch das Strömungsfeld transportiert wird. Sowohl der nur über das Vorzeichen bestehende Zusammenhang zwischen Materialverteilung und *Level-Set-Funktion* als auch die Rekonstruktion des Grenzflächenverlaufs innerhalb von Elementen führen zu einem Volumen- bzw. Massefehler, der jedoch mittels eines zusätzlichen Korrekturschrittes vermieden werden kann. Seine Umsetzung erfolgt im Rahmen eines sog. Reinitialisierungsschrittes, in dem die vorhandene *Level-Set-Funktion*

durch eine neue bei Beibehaltung der Grenzflächenlage ersetzt wird, da es beim Transport der *Level-Set*-Funktion infolge großer Gradienten im Strömungsfeld zur Bildung singulärer Stellen kommen kann.

Gebietsbeschreibung. Das in Abbildung 3.10a dargestellte Fluidgebiet Ω unterteilt sich eindeutig in die von den jeweiligen Fluidphasen belegten Teilgebiete Ω_w und Ω_a . Dabei gilt $\Omega = \Omega_w \cup \Omega_a$ und $\Omega_w \cap \Omega_a = \emptyset$. Im Hinblick auf eine allgemeine Gültigkeit ist zusätzlich zu den beiden Fluidphasen in Abbildung 3.10a noch ein Festkörpergebiet Ω_s mit aufgenommen worden. Neben einer möglichen Wechselwirkung jeder Fluidphase mit dem Festkörper interagieren beide Fluide über ihre gemeinsame Grenzfläche Σ . Im Rahmen der *Level-Set*-Methode als implizitem Grenzflächenauflösungsverfahren wird über dem Gesamtgebiet Ω eine stetige, als *Level-Set*-Funktion bezeichnete Verlaufsfunktion ϕ definiert, deren Null-Isokontur die Grenzfläche Σ angibt, die die beiden Fluidgebiete Ω_w und Ω_a voneinander trennt, so dass für diese gilt

$$\Sigma = \{\mathbf{x} \mid \phi(\mathbf{x}, t) = 0, \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega\}. \quad (3.33)$$

Des Weiteren erfolgt mittels

$$\Omega_w = \{\mathbf{x} \mid \phi(\mathbf{x}, t) < 0, \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega\} \quad \text{und} \quad \Omega_a = \{\mathbf{x} \mid \phi(\mathbf{x}, t) > 0, \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega\} \quad (3.34)$$

eine eindeutige Zuordnung der beiden Fluidgebiete zum Vorzeichen der *Level-Set*-Funktion.

Geometrieinformationen. Aus der *Level-Set*-Funktion ϕ können zusätzlich zur Lage der Grenzfläche aufgrund ihres stetigen Verlaufs noch weitere Geometrieinformationen wie Normale \mathbf{n} und Krümmung κ abgeleitet werden. Diese werden u.a. zur Berechnung bestimmter Spannungskomponenten oder zur Auswertung der die Interaktion beider Fluidphasen beschreibenden Kopplungsterme verwendet. Aufgrund der entlang der Grenzfläche Σ mit $\phi = 0$ geltenden Unveränderlichkeit der *Level-Set*-Funktion in tangentialer Richtung folgt der Normalenvektor auf der Grenzfläche unmittelbar aus dem dort vorliegenden Gradienten des *Level-Set*-Feldes:

$$\mathbf{n}(\mathbf{x}, t) = \frac{\nabla \phi(\mathbf{x}, t)}{\|\nabla \phi(\mathbf{x}, t)\|} \quad \forall \mathbf{x} \in \Sigma. \quad (3.35)$$

Dabei zeigt er stets in das mit $\phi(\mathbf{x}, t) > 0$ gekennzeichnete Gebiet. Neben dem Normalenvektor wird für spezielle Fragestellungen noch die Krümmung benötigt, wie dies z.B. zur Beschreibung der Oberflächenspannung auftritt. Die Krümmung κ ist unmittelbar über Divergenzbildung aus dem Normalenvektor \mathbf{n} ableitbar:

$$\kappa(\mathbf{x}, t) = \nabla \cdot \mathbf{n}(\mathbf{x}, t) \quad \forall \mathbf{x} \in \Sigma. \quad (3.36)$$

Bei der zur Ermittlung von Normale und Krümmung anzuwendenden Differentiation kommt es zu einer mit einem Genauigkeitsverlust verbundenen Aufräuhung, so dass die beiden Vektorfelder in der Regel deutlich weniger glatt als das ursprüngliche *Level-Set*-Feld sind. Werden zur Beschreibung der *Level-Set*-Funktion nur lineare Funktionen verwendet, so ist die Krümmung nicht mehr direkt aus dem *Level-Set*-Feld ableitbar. In diesem Fall kommen sog. Rekonstruktionsalgorithmen zum Einsatz, die auch bei nicht ausreichend hohem Polynomgrad der *Level-Set*-Funktion die Berechnungen des Krümmungsfeldes ermöglichen [Mar06]. Für eine ausführliche Zusammenstellung anwendbarer Verfahren inklusive Auswahlempfehlung s. [Pas14].

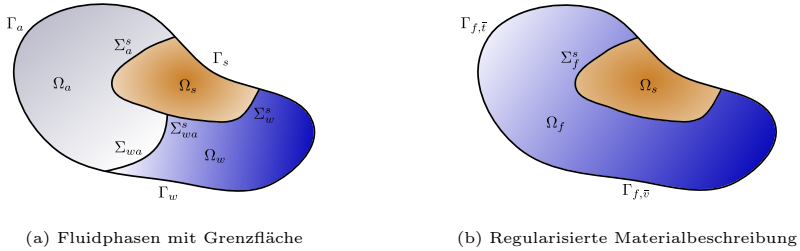


Abb. 3.10: Räumliches Gesamtgebiet mit zwei Fluidphasen und angrenzendem Festkörper

Materialbeschreibung. Auf jedem der beiden Fluidgebiete Ω_w und Ω_a liegt ein eigener Materialparametersatz (ρ_w, μ_w) bzw. (ρ_a, μ_a) vor, so dass die Grenzfläche Σ in Bezug auf die Materialparameter eine Unstetigkeit darstellt. Jedoch kann gezeigt werden, dass bei immer näherer Betrachtung bis in den mikroskopischen Bereich hinein der Übergang von einem Materialparametersatz zum anderen sich über eine bestimmte Anzahl von Molekülen erstreckt und damit eine gewisse Stetigkeit aufweist. Davon motiviert wird eine regularisierte HEAVISIDE-Funktion definiert:

$$H_\varepsilon(\phi) = \begin{cases} 1 & , \text{ wenn } \phi \leq -\varepsilon \\ \frac{1}{2} \left(1 + \frac{\phi}{\varepsilon} + \frac{1}{\pi} \sin\left(\frac{\phi \pi}{\varepsilon}\right) \right) & , \text{ wenn } |\phi| < \varepsilon \\ 0 & , \text{ wenn } \phi \geq \varepsilon \end{cases} \quad (3.37)$$

Diese ist abhängig von der *Level-Set*-Funktion ϕ und besitzt in der direkten Umgebung $\pm\varepsilon$ der Grenzfläche Σ einen stetigen Verlauf mit jedoch starkem Gradienten. Hierbei gilt $\mathcal{O}(\varepsilon) \sim h$, so dass der Übergangsbereich $\pm\varepsilon$ bei Anwendung eines numerischen Näherungsverfahrens im Bereich der Elementgröße h und damit der maximal möglichen numerischen Auflösung liegt. Im Rahmen einer Netzverfeinerung mit $h \rightarrow 0$ wird ebenso der Übergangsbereich immer kleiner, so dass $\varepsilon \rightarrow 0$ geht und die Unstetigkeit konsistent abgebildet wird. Unter Zuhilfenahme der regularisierten HEAVISIDE-Funktion H_ε ist es somit möglich, die Materialparametersätze beider Fluidphasen zu einem einzigen Parametersatz mit

$$\rho = \rho_w \cdot H_\varepsilon(\phi) + \rho_a \cdot (1 - H_\varepsilon(\phi)) \quad \text{und} \quad (3.38a)$$

$$\mu = \mu_w \cdot H_\varepsilon(\phi) + \mu_a \cdot (1 - H_\varepsilon(\phi)) \quad (3.38b)$$

zusammenzufassen. Dadurch können 2-Phasen-Strömungen, wie sie in Abbildung 3.10a schematisch dargestellt sind, mechanisch wie ein einziges Fluid behandelt werden, so dass sich als Modellbeschreibung der Zustand in Abbildung 3.10b ergibt. Hierbei besitzt dann das Berechnungsfluid zwar veränderliche Materialparameter, jedoch kann der in Abschnitt 3.2.1 zusammengestellte Satz der NAVIER-STOKES-Gleichungen weiterhin zur Abbildung des Strömungsgeschehens herangezogen werden. Darüber hinaus erlaubt die Regularisierung des Materialparameterverlaufs, die Auswertung von Gebietsintegralen, insbesondere im Bereich der Grenzfläche, ohne zusätzliche, spezielle mathematische Verfahren [Akk12]. Auf die mit der

Regularisierung verbundenden Auswirkungen im Hinblick auf die Masseerhaltung und die anzuwendenden numerischen Korrekturmechanismen wird in den Absätzen »Erhaltungseigenschaften« und »Reinitialisierung« dieses Abschnittes näher eingegangen. Neben dem hier beschriebenen, verbreiteten Ansatz der Regularisierung der Materialparameter ist es auch möglich, ihre Unstetigkeit weiterhin beizubehalten. Hierzu sind jedoch, wie es im Rahmen der *Extended Finite Element Method* (XFEM) geschieht, neben speziellen Funktionen zur Abbildung von Unstetigkeiten im Gebiet auch angepasste Lösungsstrategien bei der Auswertung der Elementintegrale anzuwenden [Köl05, Pas14, Sau13].

Level-Set-Funktion. Prinzipiell können alle stetigen Funktionen, die eine Null-Isokontur besitzen, als *Level-Set*-Funktion verwendet werden. Jedoch macht die Regularisierung der Materialparameter es erforderlich, dass die *Level-Set*-Funktion ϕ als vorzeichenbehaftete Abstandsfunktion definiert wird. Damit gibt diese für jeden Punkt \mathbf{x} im gesamten Gebiet Ω die jeweils kürzeste Entfernung zur Grenzfläche Σ an, d.h.

$$\phi(\mathbf{x}, t) = \pm \min \|\mathbf{x} - \tilde{\mathbf{x}}\| \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega \wedge \forall \tilde{\mathbf{x}} \in \Sigma. \quad (3.39)$$

Die Zuordnung des Vorzeichens in Gleichung (3.39) erfolgt in Übereinstimmung zu dem am Punkt \mathbf{x} vorhandenen Vorzeichen der *Level-Set*-Funktion $\phi(\mathbf{x}, t)$ und damit in Abhängigkeit des dort jeweils vorliegenden Materialgebietes Ω_w bzw. Ω_a . Neben der prägnanten physikalischen Interpretierbarkeit des *Level-Set*-Wertes als Abstand zur Grenzfläche folgt daraus unmittelbar die mathematisch vorteilhafte Eigenschaft, dass $\|\nabla \phi(\mathbf{x}, t)\| = 1$ ist. Dies wird insbesondere bei der weiter unten diskutierten notwendigen Reinitialisierung als Korrekturmechanismus ausgenutzt.

Entwicklungsgleichung. Die Erfassung der Grenzfläche im Rahmen der *Level-Set*-Methode erfolgt unter Gleichsetzung dieser mit der Null-Isokontur der *Level-Set*-Funktion (vgl. Gleichung (3.33)). Damit ist der *Level-Set*-Wert, der den Fluidpartikeln auf der Grenzfläche zugeordnet ist, für diese stets unverändert und es gilt für die zugehörige materielle Zeitableitung

$$\frac{d\phi}{dt} = 0 \quad \forall \tilde{\mathbf{x}} \in \Sigma. \quad (3.40)$$

Die Überführung in die EULERSche Betrachtungsweise liefert die die Entwicklung der *Level-Set*-Funktion ϕ beschreibende *Level-Set*-Gleichung

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \phi = 0, \quad (3.41)$$

in der das Strömungsfeld \mathbf{v} das *Level-Set*-Feld ϕ transportiert. Prinzipiell gilt Gleichung (3.41) nur für die Partikel, die sich zum Zeitpunkt t auf der Grenzfläche Σ befinden. Für alle abseits der Grenzfläche liegenden Partikel gilt zwar $\phi(\mathbf{x}, t) = \text{const.}$ zum Zeitpunkt t , jedoch bleibt der Abstandswert eines Partikels meist nur für einen kurzen Zeitraum unverändert. Dennoch kann Gleichung (3.41) im Hinblick auf den ohnehin in kurzen Zeitabständen notwendigen, weiter unten diskutierten Reinitialisierungs- und Wiederherstellungsschritt, bei dem die *Level-Set*-Funktion neu aufgebaut wird, in guter Näherung zur Beschreibung des gesamten *Level-Set*-Feldes verwendet werden. Mathematisch stellt die *Level-Set*-Gleichung (3.41)

eine parabolische Differentialgleichung klassischen Typs dar, vergleichbar derjenigen der konvektiven Wärmeleitung [Cou68]. Bei diesem kommt es mit fortschreitender Entwicklungszeit zu einer Glättung von ursprünglich vorhandenen Unstetigkeiten, so dass der stetige Verlaufscharakter der *Level-Set*-Funktion ϕ gegenüber dem unstetigen Verlauf der Fraktionsfunktion ψ der *Volume-of-Fluid*-Methode beim Transport durch das Strömungsfeld mathematisch einfacher zu handhaben ist.

Schwache Formulierung. Die Lösung der *Level-Set*-Entwicklungsgleichung (3.41) erfolgt wie bereits in Abschnitt 3.2 für die NAVIER-STOKES-Gleichungen mit Hilfe der Raum-Zeit-Finite-Elemente-Formulierung. Dazu wird die Entwicklungsgleichung in eine schwache Form überführt, indem die Terme der Gleichung zusammenfassend als Residuum \mathcal{R}_ϕ betrachtet und über das Raum-Zeit Gebiet Q mit einer geeigneten Funktion w_ϕ entsprechend Gleichung (3.12) gewichtet werden. Die Forderung nach punktwisem Verschwinden des gewichteten Residuums wird vereinfachend ersetzt durch die Forderung nach dem Verschwinden des zugehörigen Integrals über das gesamte Raum-Zeit-Gebiet

$$\int_Q w_\phi \mathcal{R}_\phi \, dQ = 0. \quad (3.42)$$

Die Lösung von Gleichung (3.42) erfolgt näherungsweise numerisch, indem das Raum-Zeit-Gebiet Q in aufeinanderfolgende Zeitscheiben Q_n unterteilt und jede dieser Zeitscheiben mittels Formfunktionen diskretisiert wird, so dass gilt $Q_n \rightarrow Q_n^h$. Anschließend werden auf jeder diskretisierten Zeitscheibe Q_n^h sowohl die Wichtungsfunktion w_ϕ als auch die Verläufe von *Level-Set*-Funktion ϕ und Geschwindigkeitsfeld \mathbf{v} mittels Ansatzfunktionen approximiert, so dass sich die schwache Form der *Level-Set*-Gleichung ergibt zu

$$\int_{Q_n^h} w_\phi^h \left[\frac{\partial \phi^h}{\partial t} + \mathbf{v}^h \cdot \nabla \phi^h \right] dQ + \int_{\Omega_n^h} w_\phi^h|_n^+ \left[\phi^h|_n^+ - \phi^h|_n^- \right] d\Omega = 0. \quad (3.43)$$

Hierbei stellt der erste Term in Gleichung (3.43) das diskretisierte, gewichtete *Level-Set*-Residuum der Zeitscheibe Q_n^h dar, während der zweite Term als Sprungterm die Informationsweitergabe von der vorausgegangenen Zeitscheibe Q_{n-1}^h zur aktuellen Zeitscheibe Q_n^h über die Kopplung des gemeinsamen räumlichen Gebietes Ω_n sicherstellt. Die Ansatzfunktionen zur Diskretisierung der Wichtungs- und Verlaufs-funktionen sind analog zum Vorgehen in Abschnitt 3.2.2 stetig innerhalb einer Zeitscheibe und unstetig zwischen angrenzenden Zeitscheiben, so dass räumlich ein kontinuierliches GALERKIN- und zeitlich ein diskontinuierliches GALERKIN-Verfahren vorliegt (vgl. Abschnitt 3.1.1).

Den verwendeten Wichtungsfunktionen liegt der gleiche Ansatzraum zugrunde, der auch für die Approximation der Verlaufs-funktionen verwendet wurde. Die damit vorliegende BUBNOW-GALERKIN-Wichtung ist nicht in der Lage, den infolge des konvektiven Terms der *Level-Set*-Gleichung vorliegenden gerichteten Informationsfluss angemessen abzubilden. Die Hinzunahme einer Stabilisierung kompensiert diese Beschränkung, indem die Wichtungsfunktionen an die jeweils tatsächliche Informationsausbreitung entsprechend angepasst werden, so dass sich eine

PETROW-GALERKIN-Wichtung einstellt. Für die *Level-Set*-Gleichung hat sich eine elementbezogene *Least-Squares*-Stabilisierung als geeignet erwiesen (vgl. [Rei16]), welche der schwachen Form der *Level-Set*-Gleichung (3.43) hinzugefügt wird

$$+ \sum_{e=1}^{(N_{el})_n} \int_{\hat{Q}_n^e} \tau_\phi \mathbf{L}(w_\phi^h) \cdot \mathbf{L}(\phi^h) \, dQ \quad \text{mit} \quad \mathbf{L}(\phi^h) = \frac{\partial \phi^h}{\partial t} + \mathbf{v}^h \cdot \nabla \phi^h. \quad (3.44)$$

Bei dieser wird zusätzlich zu dem bereits bei der SUPG-Stabilisierung berücksichtigtem konvektiven Term auch die Zeitableitung mit einbezogen. Als Stabilisierungsparameter τ_ϕ kommt unter Verweis auf die Arbeiten von PASENOW [Pas14] und KÖLKE [Köl05] mit

$$\tau_\phi = \left[\left(\frac{2}{\Delta t} \right)^2 + \left(\frac{2 \|\mathbf{v}\|}{h} \right)^2 \right]^{-\frac{1}{2}} \quad (3.45)$$

eine Variante des in Gleichung (3.20) gezeigten und bereits für die schwache Form der NAVIER-STOKES-Gleichungen verwendeten PSPG-Stabilisierungsparameters zur Anwendung. Er ist so ausgelegt, dass er bei dominierender Konvektion maßgeblich von der Elementlänge h beeinflusst wird, während bei starker Instationarität die Zeitscheibendicke Δt dominiert. Sowohl bei räumlicher als auch bei zeitlicher Netzverfeinerung verschwindet er hingegen und gewährleistet damit eine konsistente Diskretisierung.

Kopplung zum Strömungsfeld. Das *Level-Set*-Feld ϕ beschreibt die Bewegung der beide Fluidgebiete trennenden Grenzfläche Σ und damit die Materialverteilung innerhalb des Raum-Zeit-Gebietes Q . Infolge der Dynamik beider Fluidphasen und ihrer Interaktion untereinander verändert sich die Grenzflächenlage und damit die Materialverteilung im Gebiet. Damit transportiert das infolge der Regularisierung gemeinsame Strömungsfeld beider Fluidphasen über die jeweils an einem Ort vorliegende Strömungsgeschwindigkeit \mathbf{v} die *Level-Set*-Funktion ϕ mittels Gleichung (3.41). Im Umkehrschluss definiert die *Level-Set*-Funktion mittels Gleichung (3.38) die am jeweiligen Ort vorliegende Fluidphase und den ihr zugehörigen Materialparametersatz (ρ_i, μ_i) . Insgesamt kann damit unter Hinzunahme des *Level-Set*-Feldes zur Beschreibung der Materialverteilung eine 2-Phasen-Strömung analog einer einphasigen Strömung anhand des in Abschnitt 3.2.1 bzw. Abschnitt 3.2.2 vorgestellten Gleichungssatzes beschrieben werden. Hierzu ist lediglich die schwache Form der NAVIER-STOKES-Gleichungen (3.14) um Gleichung (3.43) zu ergänzen. Das resultierende Gleichungssystem bestehend aus den Variablen Strömungsgeschwindigkeit \mathbf{v} , Druck p und *Level-Set*-Funktion ϕ ist in sich geschlossen, da Viskosität μ und infolge der vorausgesetzten Inkompressibilität auch die Dichte ρ reine Materialeigenschaften sind. Damit erweitert sich der Residuenvektor (3.28) unter Vernachlässigung der in den Gleichungen (3.20), (3.22), (3.24) und (3.44) eingeführten Stabilisierungsterme zu

$$\mathbf{R}(\hat{\mathbf{z}}) = \begin{bmatrix} \mathbf{R}_v(\hat{\mathbf{v}}, \hat{\mathbf{p}}, \hat{\phi}) \\ \mathbf{R}_p(\hat{\mathbf{v}}) \\ \mathbf{R}_\phi(\hat{\mathbf{v}}, \hat{\phi}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{vv}(\hat{\mathbf{v}}, \hat{\phi}) \cdot \hat{\mathbf{v}} + \mathbf{K}_{vp} \cdot \hat{\mathbf{p}} - \mathbf{r}_v \\ \mathbf{K}_{vp}^T \cdot \hat{\mathbf{v}} \\ \mathbf{K}_\phi(\hat{\mathbf{v}}) \cdot \hat{\phi} - \mathbf{r}_\phi \end{bmatrix} = \mathbf{0}. \quad (3.46)$$

Für die Definition der angegebenen Untermatrizen siehe Abschnitt 3.2.2. Analog zum Vorgehen für die in Abschnitt 3.2.2 für eine einzelne Fluidphase angegebenen diskretisierten NAVIER-STOKES-Gleichungen erfolgt die Linearisierung des um die *Level-Set*-Gleichung erweiterten Residuen-Vektors $\mathbf{R}(\hat{\mathbf{z}})$ wie vorher mittels NEWTON-RAPHSON-Verfahren entsprechend Gleichung (3.29) nun unter Verwendung von $\hat{\mathbf{z}} = \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{v}} & \hat{\mathbf{p}} & \hat{\phi} \end{bmatrix}^T$. Das iterativ zu lösende, linearisierte Gleichungssystem zur Berechnung der Lösungsinkremente einer Zeitscheibe lautet damit

$$\begin{bmatrix} \partial_{\hat{\mathbf{v}}} \mathbf{R}_{\mathbf{v}} & \partial_{\hat{\mathbf{p}}} \mathbf{R}_{\mathbf{v}} & \partial_{\hat{\phi}} \mathbf{R}_{\mathbf{v}} \\ \partial_{\hat{\mathbf{v}}} \mathbf{R}_{\mathbf{p}} & \partial_{\hat{\mathbf{p}}} \mathbf{R}_{\mathbf{p}} & \partial_{\hat{\phi}} \mathbf{R}_{\mathbf{p}} \\ \partial_{\hat{\mathbf{v}}} \mathbf{R}_{\phi} & \partial_{\hat{\mathbf{p}}} \mathbf{R}_{\phi} & \partial_{\hat{\phi}} \mathbf{R}_{\phi} \end{bmatrix}_{(\hat{\mathbf{z}}^{(i)})} \bullet \begin{bmatrix} \Delta \hat{\mathbf{v}}^{(i)} \\ \Delta \hat{\mathbf{p}}^{(i)} \\ \Delta \hat{\phi}^{(i)} \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} \mathbf{R}_{\mathbf{v}}(\hat{\mathbf{z}}^{(i)}) \\ \mathbf{R}_{\mathbf{p}}(\hat{\mathbf{z}}^{(i)}) \\ \mathbf{R}_{\phi}(\hat{\mathbf{z}}^{(i)}) \end{bmatrix}. \quad (3.47)$$

Neben den Nichtnulleinträgen $\partial_{\hat{\mathbf{v}}} \mathbf{R}_{\mathbf{v}}$, $\partial_{\hat{\mathbf{p}}} \mathbf{R}_{\mathbf{v}}$ und $\partial_{\hat{\phi}} \mathbf{R}_{\mathbf{v}}$ der Impulsbilanz sowie $\partial_{\hat{\mathbf{v}}} \mathbf{R}_{\mathbf{p}}$, $\partial_{\hat{\phi}} \mathbf{R}_{\mathbf{p}}$ und $\partial_{\hat{\phi}} \mathbf{R}_{\phi}$ für Masseerhaltung bzw. *Level-Set*-Gleichung werden die eigentlich verschwindenden Terme $\partial_{\hat{\mathbf{p}}} \mathbf{R}_{\mathbf{p}}$ und $\partial_{\hat{\phi}} \mathbf{R}_{\mathbf{p}}$ von den Stabilisierungseinträgen der Gleichungen (3.20), (3.22) und (3.24) aufgefüllt. Lediglich der Term $\partial_{\hat{\mathbf{p}}} \mathbf{R}_{\phi}$ verbleibt identisch Null, so dass keine direkte Kopplung zwischen *Level-Set*-Gleichung und Masseerhaltung besteht. Darüber hinaus sind die durch die *Level-Set*-Gleichung hinzugetretenen, sich an der Hauptdiagonale spiegelnden Nebendiagonaleinträge weder gleich, noch entsprechen sich ihre negativ Transponierten, so dass für die resultierende Tangensteifigkeitsmatrix $\partial_{\hat{\mathbf{z}}} \mathbf{R}$ keine Symmetrie oder Antimetrie vorliegt. Die Anwendung vereinfachender numerischer Verfahren zur Lösung des linearisierten Gleichungssystems ist dadurch nicht möglich.

Erhaltungseigenschaft. Aufgrund des bei der *Level-Set*-Methode nur zwischen dem Vorzeichen der *Level-Set*-Funktion und der Materialeigenschaft bestehenden Zusammenhangs ist selbst bei Verwendung konservativer numerischer Verfahren eine Volumen- bzw. Masseerhaltung nicht gegeben. Insgesamt hängt die Lösungsgüte bei der Verwendung des *Level-Set*-Verfahrens stark von der Ansatzordnung der *Level-Set*-Funktion, der Elementgröße, insbesondere in der direkten Umgebung der Grenzfläche, sowie von der Zeitschrittweite ab [Osh01, Osh03]. Höhere Polynomgrade der *Level-Set*-Funktion verbessern zwar deren Abbildung, jedoch erschweren sie gleichzeitig die Lagebestimmung der Grenzfläche. Eine exakte Lagebestimmung der Grenzfläche sowohl auf den Elementkanten als auch im Elementgebiet ist in der Regel nur bei Simplex-Elementen möglich. Bei Prismenelementen kann die Grenzflächenlage im Elementgebiet nur noch näherungsweise bestimmt werden. Im Zuge des zur Aufrechterhaltung der Abstandseigenschaft notwendigen, im nächsten Absatz diskutierten Reinitialisierungsschrittes führt die nur näherungsweise Möglichkeit der Bestimmung der Grenzflächenlage unweigerlich zu einem Volumen- und Massefehler. Zur Verringerung dieses Fehlers ist eine Netzverfeinerung oder angepasste Knotenverschiebung (*h*- bzw. *r*-Adaptivität) vorteilhaft, die zu einer besseren Auflösung der Grenzflächenlage führen würde. Jedoch wären diese aufwendigen Adaptionen für jede Zeitscheibe neu und besonders bei dem für 2-Phasen-Strömungen charakteristischen komplexen Strömungsgeschehen nur schwer und begrenzt automatisierbar umzusetzen. Damit verbleibt im Hinblick auf ein praktikables Vorgehen letztendlich die Notwendigkeit der

Durchführung eines nachgeschalteten Korrekturschrittes zur Gewährleistung der Aufrechterhaltung der ursprünglichen Volumenanteile beider Fluidphasen. Neben hybriden Ansätzen, die die *Level-Set*-Methode unter Hinzunahme von volumenerhaltenden Verfahren erweitern, wie z.B. durch Kombination mit Partikel- oder *Volume-of-Fluid*-Methoden [Enr02, Sus00], kommen auch spezielle Korrekturfahren zum Einsatz. Neben dem etablierten Verfahren von SMOLIANSKI [Smo01] mit globalem Korrekturfaktor hat sich besonders das Vorgehen von MUT et al. [Mut06] mit dazu vorgeschalteter lokaler Korrektur als geeignet erwiesen. Der Korrekturschritt wird dabei zusammen mit dem ohnehin notwendigen, im nächsten Absatz ausführlicher beschriebenen Reinitialisierungsschritt durchgeführt.

Reinitialisierung. Bei dem innerhalb einer Zeitscheibe stattfindenden Transport des *Level-Set*-Feldes durch das Strömungsfeld geht in der Regel die mathematisch vorteilhafte und für die regularisierten Materialparameter notwendige Abstandseigenschaft verloren. Insbesondere fördern große Geschwindigkeitsgradienten im Strömungsfeld die Ausbildung singulärer Bereiche der *Level-Set*-Funktion, wodurch sowohl die korrekte Bestimmung der Grenzflächenlage und der davon abgeleiteten Geometrieinformationen erschwert wird als auch sich das Lösungsverhalten des Gesamtgleichungssystems merklich verschlechtert. Um die Entartungserscheinungen beim Transport der *Level-Set*-Funktion und die damit verbundenen nachteiligen Auswirkungen im Laufe der Berechnung gering zu halten, ist es daher notwendig, die Abstandseigenschaft zum Beginn einer neuen Zeitscheibe wiederherzustellen. Dabei ist die vorhandene Grenzflächenlage möglichst exakt wiederzugeben, da ein Lagefehler unmittelbar zu einem Massefehler führt. Auch ist die Abstandseigenschaft infolge ihres Einflusses auf den regularisierten Verlauf der Materialparameter in der unmittelbaren Umgebung der Grenzfläche so genau wie möglich zu ermitteln, während in weiterer Entfernung eine nur näherungsweise Berechnung ausreichend ist. Die zum Ende einer Zeitscheibe stattfindende Wiederherstellung der Abstandseigenschaft erfolgt als Austausch der bisherigen, degenerierten *Level-Set*-Funktion mit einer neuen *Level-Set*-Funktion. Dabei stimmt sowohl die Null-Isokontur der neuen *Level-Set*-Funktion mit der bisherigen überein als auch ist die Abstandseigenschaft insbesondere in der unmittelbaren Umgebung der Grenzfläche wieder gegeben. Der Austauschvorgang im Zusammenhang mit der Konstruktion der neuen *Level-Set*-Funktion wird als Reinitialisierung bezeichnet.

Für die Reinitialisierung wurden verschiedene leistungsfähige Algorithmen entwickelt, wobei sich die direkte Methode mit Volumenkorrektur [Mut06], der PDE-Ansatz [Sus94] und die *Fast-Marching*-Methode [Set96] als gebräuchteste Verfahren herauskristallisiert haben. Die direkte Methode wurde ursprünglich von CHOPP zuerst noch ohne Volumenkorrektur entwickelt [Cho93]. Bei ihr erfolgt im Rahmen der Reinitialisierung eine elementweise Rekonstruktion der Grenzfläche ausgehend von den geschnittenen Elementkanten mittels geometrischer Primitiva. Anschließend wird für jeden Knoten die Abstandsberechnung zu allen geometrischen Primitiva vorgenommen. Der kleinste Wert weist dann die nach Gleichung (3.39) geforderte Abstandseigenschaft auf und wird dem jeweiligen Knoten als *Level-Set*-Wert zugewiesen. Zur Verringerung des bei zunehmender Knotenanzahl stark anwachsenden Berechnungsaufwandes kann die Neuberechnung des Abstandes im Rahmen eines *Narrow-Band-Approach* auf die unmittelbare Umgebung der Grenzfläche begrenzt werden. Obwohl die direkten Methode nach CHOPP sehr robust ist, kann es insbesondere im Bereich stark gekrümmter Grenzflächenverläufe zu teils signifikanten Lage- und Volumenfehlern kommen, so dass von MUT et

al. ein Korrekturmechanismus zur Gewährleistung der Volumenerhaltung entwickelt wurde [Mut06]. Nach Rekonstruktion des Grenzflächenverlaufs innerhalb eines Elementes wird die damit einhergehende Volumendifferenz berechnet. Diese stellt den Startwert zur Berechnung einer elementspezifischen Korrekturfunktion dar, mittels der der entstandene Volumenfehler in einem Element wieder egalisiert wird. Die Werte der elementspezifischen Korrekturfunktionen werden anschließend an den Knoten benachbarter Elemente gemittelt, so dass ergänzend eine stetige Korrekturfunktion für das Gesamtgebiet konstruiert werden kann. Zusätzlich zur bereits durchgeführten lokalen Korrektur des Volumenfehlers auf Elementebene erfolgt dann mit Hilfe der auf dem gesamten Gebiet stetigen Korrekturfunktion eine Minimierung des globalen Volumenfehlers. Durch Beschränkung auf die Knoten im Nahbereich und Berücksichtigung der geometrischen Primitiva nur angrenzender Elemente bei der Abstandsberechnung kann der Berechnungsaufwand ohne Verlust der Lagegenauigkeit der Grenzfläche erheblich reduziert werden. PASENOW konnte zeigen, dass die direkte Methode mit Volumenkorrektur sowohl den geringsten Lage- als auch Volumenfehler bei gleichwertigen Konvergenzeigenschaften aufweist [Pas14].

In Kombination mit der direkten Methode mit Volumenkorrektur für den Nahbereich der Grenzfläche bietet sich die von SETHIAN entwickelte *Fast-Marching*-Methode für den Fernbereich an [Set96]. Sie basiert auf einer näherungsweisen Lösung der verallgemeinerten Eikonalgleichung und führt zu einem sukzessiven Neuaufbau ausgehend von der Grenzfläche, wobei der Informationsfluss sich von niedrigen zu höheren Abstandswerten analog einem *Upwind*-Verfahren ausbreitet. Insgesamt besteht das Verfahren aus einem Initialisierungs- und einem Konstruktionsschritt, in dem beginnend beim Knoten mit dem geringsten Abstandswert eine iterative Abarbeitung sämtlicher Knoten mit minimalem Bearbeitungsaufwand erfolgt. Insbesondere besitzt das Verfahren auf unstrukturierten Netzen den geringsten Zeitaufwand. Für eine ausführliche Beschreibung zum algorithmischen Vorgehen s. neben [Set96] auch [Pas14].

Die Kombination von direkter Methode mit Volumenkorrektur für die Reinitialisierung des Nahbereichs der Grenzfläche und Verwendung der *Fast-Marching*-Methode für den Fernbereich liefert eine sehr gute Lage- und Volumenerhaltung bei einem auch für feinaufgelöste, unstrukturierte Netze noch akzeptablen Berechnungsaufwand [Rei16].

3.3.3 Sohlschwelle

Vorbemerkung. Die Verifikation der um die *Level-Set*-Gleichung erweiterten Raum-Zeit-Finite-Elemente-Formulierung (3.47) zur Berechnung von 2-Phasen-Strömungen auf Basis der inkompressiblen NAVIER-STOKES-Gleichungen mit einem regularisierten Materialverlauf im Bereich der Grenzfläche erfolgt anhand der Untersuchung der Überströmung der in Abbildung 3.11 dargestellten Sohlschwelle. Das Berechnungsbeispiel wurde von SAUERLAND in [Sau11] im Zuge der vergleichenden Darstellung der Einsatzmöglichkeiten der *extended finite element method* (XFEM) bei Freispiegel- und 2-Phasen-Strömungen vorgestellt. Es kann als eine Erweiterung des in [Pas14] zur Verifikation von 2-Phasen-Strömungen auf offenen Gebieten verwendeten Untersuchungsbeispiels angesehen werden. Die sich als Störkörper am Boden befindende Sohlschwelle sorgt im Nachlauf für eine wellenförmige Auslenkung der Grenzflächenlage, wobei es in Abhängigkeit des Fließzustandes auch zur Vermischung beider Fluidphasen kommen kann. Gegenüber der zur Verifikation von 2-Phasen-Strömungen häufig herangezogenen Berechnung der Wellenbildung in einem Wassertank [Köl05, Pas14] ist das betrachtete Berechnungsgebiet infolge der vorhandenen Ein- und Ausströmänder offen, so dass ein Massstrom sowohl in das Gebiet hinein als auch hinaus erfolgt. Neben der physikalisch plausiblen Wiedergabe des Strömungszustandes, wie er z.B. in [CO11] ausführlich untersucht wurde, wird als Referenzlösung zur Verifikation der korrekten Grenzflächenlage im stationären Zustand [Sau11] herangezogen.

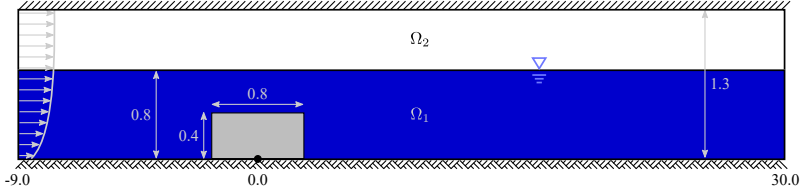


Abb. 3.11: Berechnungsgebiet mit Randbedingungen

Berechnungsgebiet. Das in Abbildung 3.11 dargestellte rechteckige Berechnungsgebiet ist 39 m lang und 1.3 m hoch. Im Koordinatenursprung ist ein 80 cm breites und 40 cm hohes Rechteck als Sohlschwelle angeordnet. Das Gesamtgebiet ist im unteren Bereich von einer schweren Fluidphase ($\rho_1 = 1 \text{ kg/m}^3$, $\mu_1 = 1 \times 10^{-3} \text{ (Ns)/m}^2$) und im oberen Bereich von einer leichten Fluidphase ($\rho_2 = 1 \times 10^{-3} \text{ kg/m}^3$, $\mu_2 = 1 \times 10^{-3} \text{ (Ns)/m}^2$) belegt, die im Ausgangszustand bei $y_{\text{int}} = 0.8 \text{ m}$ horizontal voneinander getrennt sind und einer vertikal wirkenden Erdbeschleunigung von $g = 9.81 \text{ N/kg}$ unterliegen. Auf dem gesamten unteren Rand inklusive der Sohlschwelle sind *no-slip*-Randbedingungen gesetzt, während am oberen Rand *slip*-Randbedingungen vorliegen. Am Einströmrand wird über die Verlaufsdefinition der *Level-Set*-Funktion mit ihrem Nulldurchgang bei $y_{\text{int}} = 0.8 \text{ m}$ in Verbindung mit der Vorgabe des horizontalen Geschwindigkeitsprofils

$$\bar{v}_x = \begin{cases} 1.2 \cdot (y/y_{\text{int}})^{0.25} & \text{für } y < y_{\text{int}} \\ 1.2 & \text{für } y \geq y_{\text{int}} \end{cases} \quad (3.48)$$

und der vertikalen Geschwindigkeit von $\bar{v}_y = 0$ die einströmende Materialverteilung eingestellt. Die Vorgabe des Geschwindigkeitsprofils erfolgt in Übereinstimmung mit den mathematischen Anforderungen der *Level-Set*-Funktion gegenüber [Sau11] jedoch nur am Einströmrand, so dass sich das Geschwindigkeitsprofil am Ausströmrand frei einstellen kann. Ebenfalls am Einströmrand wird an dessen oberstem Punkt das Druckniveau mit $\bar{p} = 0 \text{ N/m}^2$ gesetzt. Die Vernetzung erfolgt gleichförmig strukturiert mit 9376 Elementen bei einem längsgestreckten Seitenverhältnis von 3.25, so dass die Regularisierungsbreite mit 4 cm im Bereich der Elementhöhe liegt. Insgesamt wird damit das Gesamtgebiet mit 9376 Knoten belegt und für jede Zeitscheibe mit einer Dicke von $\Delta t = 0.02 \text{ s}$ ist ein Gleichungssystem mit 75 008 Unbekannten bis zum Erreichen des stationären Zustandes zu lösen.

Strömungsfeld. Der stationäre Zustand ist bei $t = 20 \text{ s}$ erreicht und mit seinen zugehörigen Strömungsfeldern in Abbildung 3.12 dargestellt. Gut erkennbar ist die ausgeprägte Überfallkurve sowie die Wellenbildung im Nachlaufbereich der rechteckigen Sohlschwelle. Der wellenförmige Verlauf der Grenzfläche beeinflusst erkennbar das Geschwindigkeitsprofil (Abbildung 3.12a). Unmittelbar am Ende der Sohlschwelle kommt es infolge des Absinkens der Überfallkurve zu einer starken Beschleunigung im Geschwindigkeitsfeld, deren Maximum im ersten Wellental erreicht wird. Mit dem Ansteigen zum nächsten Wellenberg verringert sich die Strömungsgeschwindigkeit zunächst, im nächsten Wellental wächst sie dann jedoch wieder an. Dabei erreicht sie nicht mehr dieselbe Größenordnung wie unmittelbar nach dem Überströmen der Sohlschwelle. Im Bodenbereich kommt es sowohl direkt hinter der Sohlschwelle als auch unterhalb der Wellenberge zur ausgeprägten Wirbelbildung, während ansonsten das Strömungsfeld dem wellenförmigen Grenzflächenverlauf weitestgehend folgt. Die Auswirkung des Absinkens der Überfallkurve sowie die Wellenbildung lässt sich auch im Druckfeld beobachten (Abbildung 3.12b). Im Bereich der Sohlschwelle krümmen sich die Isobaren und folgen dabei dem Verlauf der Absenkkurve. Im Nachlaufbereich ist in den tieferen Schichten wieder eine vorwiegend hydrostatische Druckverteilung erkennbar, während im oberen Bereich die Isobaren noch vom wellenförmigen Grenzflächenverlauf beeinflusst bleiben. Dabei liegt das Druckniveau vor der Sohlschwelle in der untersten Schicht infolge des stauenden Einflusses oberhalb desjenigen des Nachlaufbereichs.

Mit einer über der Sohlschwelle (charakteristische Länge $d = 0.4 \text{ m}$) gemittelten Strömungsgeschwindigkeit von $v \approx 1.63 \text{ m/s}$ und einer Überfallhöhe von $h = 0.48 \text{ m}$ ergeben sich für den betrachteten Strömungszustand als charakteristische Kennzahlen:

$$\text{Re} = \frac{vd}{\nu_1} \approx 65 \quad \text{und} \quad \text{Fr} = \frac{v}{\sqrt{gh}} \approx 0.75. \quad (3.49)$$

Diese stehen in Übereinstimmung mit den Ergebnissen von [Sau11], wobei die geringe Abweichung von 0.05 in der FROUDE-Zahl auf die nicht vollständig bekannte Netztopologie der Referenzlösung zurückgeführt werden kann.

Grenzflächenlage. Neben dem Geschwindigkeits- und Druckfeld ist in Abbildung 3.13 zur Verifikation der berechnete Grenzflächenverlauf demjenigen aus [Sau11] gegenübergestellt. Sowohl im Einströmbereich als auch für den gesamten Verlauf der Absenkkurve über der Sohlschwelle kann eine Übereinstimmung der Berechnungsergebnisse erzielt werden. Erst nach

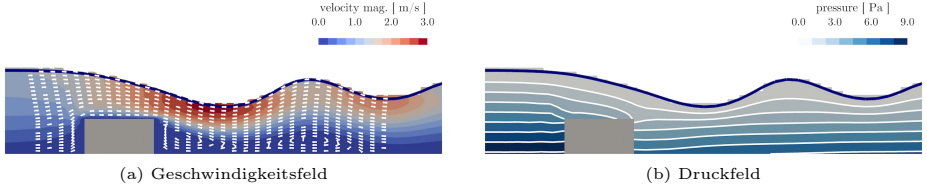


Abb. 3.12: Stationärer Zustand

dem Sohlschwellenende und mit dem Einsetzen der Wellenbildung zeigt sich ein geringfügiger Phasen- und Amplitudenfehler. Dabei liegt der berechnete Grenzflächenverlauf stets etwas unterhalb der Referenzlage. Die Unterschiede resultieren sowohl aus dem gegenüber der Referenzlösung physikalisch begründeten freien Ausströmrand sowie aus der Unkenntnis der der Referenzberechnung zugrunde liegenden Netztopologie. Gegenüber der bei der Referenzlösung angewendeten XFEM, die mit ihren zusätzlichen Ansatzfunktionen in der Lage ist, die Materialverteilung in der unmittelbaren Umgebung der Grenzfläche nahezu unabhängig von der Netzdichte wiederzugeben, gewinnen bei der Verwendung einer regularisierten Materialverteilung Netzdichte und -topologie einen Einfluss auf die Lösungsabbildung. Sowohl die Auswirkung der Netzdichte als auch die Wahl der Regularisierungsbreite auf Form und Lage der Grenzfläche konnte bei den durchgeführten Berechnungen beobachtet werden.

Zwar ist die Beschreibung von 2-Phasen-Strömungen mittels regularisierter Materialverteilung abhängig von Netzdichte und -topologie in der Umgebung der Grenzfläche, jedoch kann bei angepasster Vernetzung und Wahl einer Regularisierungsbreite in der Größe der Elementabmessungen ein der XFEM vergleichbar genaues Berechnungsergebnis erzielt werden. Dabei ist mit nahezu gleichen Erhaltungseigenschaften der Berechnungsaufwand erheblich geringer, da keine nachträgliche Unterteilung der von der Grenzfläche geschnittenen Elemente zur Auswertung der Elementintegrale erfolgen muss. Eine ausführliche Untersuchung des *Level-Set*-Feldes sowie seines Gradienten im Hinblick auf den Reinitialisierungseinfluss erfolgt in Abschnitt 3.4.4.

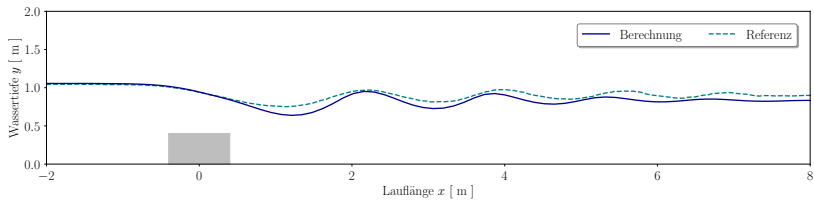


Abb. 3.13: Vergleich Grenzflächenlage

3.4 Netzbewegung

3.4.1 Gebräuchliche Verfahren

Vorbemerkung. Bei 2-Phasen-Strömungen mit einer sich über die Zeit verändernden Grenzflächenlage sowie bei Wechselwirkung einer Strömung mit einem elastischen oder starren Körper ist das Strömungsgebiet in der Zeit veränderlich. Die gegenseitige Beeinflussung der beteiligten Fluidphasen bzw. die Interaktion von Strömung und Struktur stellt für das jeweilige Fluidgebiet eine eingeprägte Randbewegung dar. In der kontinuumsmechanischen Beschreibung bedingt ein veränderliches Gebiet einen sich bewegenden Beobachter, dessen Geschwindigkeit dann in den Grundgleichungen auftritt (vgl. Abschnitt 2.2.3). Dabei ist die Beobachtergeschwindigkeit neben den festen Gebietsrändern nur am sich bewegenden Rand des Strömungsgebietes mit der Geschwindigkeit der Fluidpartikel festgelegt, während im übrigen Gebiet sich der Beobachter unabhängig davon bewegen kann. Damit unterliegt die Beschreibung von Strömungen auf veränderlichen Gebieten prinzipiell den in Abschnitt 2.3.1 auf Basis der *Arbitrary-Lagrangian-Eulerian*-Betrachtungsweise (ALE-Betrachtungsweise) hergeleiteten Grundgleichungen. Nach der Diskretisierung der Grundgleichungen geht im Rahmen einer Finite-Elemente-Formulierung, bei der das Berechnungsgebiet in ein Netz aus finiten Elementen mit gemeinsamen Knoten unterteilt wird, die Geschwindigkeit des Beobachters in die Netzgeschwindigkeit über und die eingeprägten Grenzflächen- bzw. Randverschiebungen führen zu Positionsänderungen der auf dem Rand liegenden Knoten. Hierbei würde eine alleinige Bewegung der Randknoten schnell zu stark verzerrten oder sogar entarteten Elementen am Gebietsrand führen, so dass eine berechnungstechnisch aufwendige und mit einem Projektionsfehler behaftete Neuvernetzung notwendig werden würde. Um eine Neuvernetzung so lange wie möglich oder sogar gänzlich zu vermeiden, ist daher die Verwendung eines Netzbewegungsverfahrens notwendig, das ausgehend von den vorgegeben Verschiebungen der Randknoten auch für Knoten im Gebietsinneren neue Positionen ermittelt. Dadurch müssen die Netzverzerrungen nicht nur von den Randelementen getragen werden, sondern verteilen sich über ein größeres Netzgebiet und können so je Element minimiert werden. Wesentliche Anforderungen an ein Netzbewegungsverfahren sind die Verschlechterung in der Elementqualität bei den auftretenden Knotenverschiebungen so lange wie möglich gering zu halten sowie die Erhaltung der wesentlichen Charakteristika der Netztopologie des Ausgangszustandes [Wal99]. Auch ist stets der zugehörige zusätzliche Berechnungsaufwand zur Ermittlung der Netzbewegung minimal zu halten.

Erhaltungseigenschaft. Neben diesen eher algorithmischen Belangen ist jedoch die grundlegende Anforderung an ein Netzbewegungsverfahren, dass weiterhin die physikalisch korrekte Lösung mit dem verwendeten numerischen Verfahren abgebildet wird. Als numerischer Testfall hat sich hierzu die Wiedergabe eines gleichförmigen Strömungsfeldes im stationären Zustand bei einem beweglichen Netz herausgebildet [Wal99]. Für semidiskrete Verfahren, bei denen die Diskretisierung von räumlichem Gebiet und Zeitbereich auf unterschiedliche Art und Weise erfolgt, ist dies möglich, wenn die Integration des Elementvolumens je Zeitpunkt exakt erfolgt, so dass die Volumenänderung eines Elementes zwischen zwei Zeitpunkten dem während der zugehörigen Zeitspanne vom Element überstrichenen Volumen entspricht [Fer08]. Diese Bedin-

gung wird als geometrisches Raumerhaltungsgesetz (*geometric conservation law*, GCL) bzw. als diskretes geometrisches Raumerhaltungsgesetz (DGCL) bezeichnet, da es in engem Zusammenhang mit der zeitlichen Diskretisierung steht [Hüb03]. Bei semidiskreten Verfahren gelingt die Einhaltung der GCL, indem die relevanten geometrischen Größen, insbesondere die Geschwindigkeiten der Knoten, konsistent aus der Netzbewegung abgeleitet werden. LESOINNE und FARHAT konnten zeigen, dass die Verwendung der Mittelpunktsregel eine korrekte Berechnung der Netzgeschwindigkeit gewährleistet, so dass die GCL stets eingehalten ist [Les96]. Damit ist sichergestellt, dass die Stabilitätseigenschaften des numerischen Berechnungsverfahrens im Hinblick auf die Lösung nichtlinearer Modellgleichungen auch unter Hinzunahme eines Netzbewegungsverfahrens weiterhin bestehen bleiben [Far01]. Wird die GCL nicht erfüllt, so stellt sie mindestens eine Zwangsbedingung für die Zeitschrittweite dar und führt bei der Berechnung inkompressibler Strömungen zu einer künstlichen Massenproduktion.

Netzbewegung bei Raum-Zeit-Diskretisierungen. Gegenüber semidiskreten Verfahren bieten Raum-Zeit-Formulierungen als volldiskrete Verfahren eine elegante Möglichkeit Strömungen auf veränderlichen Gebieten numerisch abzubilden. Aufgrund der Integration über das Raum-Zeit-Gebiet wird die räumliche Veränderung des Berechnungsgebietes in der Zeit konsistent erfasst, so dass Raum-Zeit-Finite-Element-Formulierungen die GCL stets erfüllen [Les96]. Lediglich im Hinblick auf die verwendeten Ansatzfunktionen für Geometrie-, Wichtungs- und Lösungsvariablenverlauf ist eine genaue Auswertung der Elementintegrale zu gewährleisten.

Im Gegensatz zu semidiskreten Verfahren, deren Modellgleichungen stets auf einer einen sich beliebig bewegendenden Beobachter beinhaltenden ALE-Formulierung aufbauen müssen, verbleiben die Modellgleichungen bei Raum-Zeit-Diskretisierungen durchweg in der EULERScher Betrachtungsweise. Die Berücksichtigung der sich aus dem veränderlichen Gebiet ergebenden Netzbewegung erfolgt über die JACOBI-Matrix der Raum-Zeit-Elemente. Der Zusammenhang zwischen beiden Verfahren wird sichtbar, wenn man den instationären und konvektiven Anteil der Impulsbilanz (3.14) betrachtet

$$\int_{Q_n^h} \mathbf{w}_v^h \rho \left[\frac{\partial \mathbf{v}^h}{\partial t} + \mathbf{v}^h \cdot \nabla \mathbf{v}^h \right] dQ \quad (3.50)$$

und dabei berücksichtigt, dass die Strömungsgeschwindigkeit nach Unterteilung des Gesamtgebietes in finite Elemente eine Funktion der lokalen Elementkoordinaten ist, so dass gilt $\mathbf{v}^h = \mathbf{v}^h(\boldsymbol{\xi}, \tau)$. Mittels impliziter Differentiation ergibt sich dann

$$\frac{\partial \mathbf{v}^h}{\partial t} = \frac{\partial \mathbf{v}^h}{\partial \tau} \frac{\partial \tau}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{v}^h}{\partial \boldsymbol{\xi}} \frac{\partial \boldsymbol{\xi}}{\partial t}, \quad (3.51)$$

wobei der jeweils zweite Faktor jedes Summanden Bestandteil der Inversen der Element-JACOBI-Matrix \mathbf{J}^{-1} ist. Liegt allen Knoten eines Raum-Zeit-Elementes derselbe Anfangs- und Endzeitpunkt innerhalb einer Zeitscheibe zugrunde, so gilt $\frac{\partial \tau}{\partial t} = \frac{2}{\Delta t}$ und unter Berücksichtigung der Unveränderlichkeit der lokalen Koordinaten folgt $\frac{\partial \boldsymbol{\xi}}{\partial t} = -\frac{\partial \boldsymbol{\xi}}{\partial \mathbf{x}} \frac{d\mathbf{x}}{dt}$, so dass sich die instationäre Geschwindigkeitsableitung auch formulieren lässt als

$$\frac{\partial \mathbf{v}^h}{\partial t} = \frac{\partial \mathbf{v}^h}{\partial \tau} \frac{2}{\Delta t} - \mathbf{v}_m^h \cdot \nabla \mathbf{v}^h \quad (3.52)$$

mit $\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{v}_m^h$ und $\frac{\partial \mathbf{v}^h}{\partial \mathbf{x}} = \nabla \mathbf{v}^h$ als Netzgeschwindigkeit bzw. räumlichen Geschwindigkeitsgradienten. Setzt man Gleichung (3.52) in Gleichung (3.50) ein

$$\int_{Q_n^h} \mathbf{w}_v^h \rho \left[\frac{\partial \mathbf{v}^h}{\partial \tau} \frac{2}{\Delta t} + (\mathbf{v}^h - \mathbf{v}_m^h) \cdot \nabla \mathbf{v}^h \right] dQ, \quad (3.53)$$

so wird die Berücksichtigung eines veränderlichen Gebietes im Rahmen einer Raum-Zeit-Finite-Elemente-Formulierung sichtbar [Beh94]. Damit bilden Raum-Zeit-Diskretisierungen als volldiskrete Verfahren eine Untermenge von ALE-Verfahren.

Letztendlich kann es bei der Strömungsberechnung auf veränderlichen Gebieten trotz Verwendung eines Netzbewegungsverfahrens notwendig sein, eine Neuvernetzung durchzuführen, wenn die Randbewegungen derart groß werden, dass ihre Ausbreitung in das Berechnungsgebiet nicht ausreicht, um degenerierte Elemente zu vermeiden. Raum-Zeit-Finite-Elemente-Formulierungen stellen hierfür über den in der schwachen Form beinhalteten Sprungterm

$$\int_{\Omega_n^h} \mathbf{w}_v^h |_n^+ \left[\left(\rho \mathbf{v}^h \right) |_n^+ - \left(\rho \mathbf{v}^h \right) |_n^- \right] d\Omega \quad (3.54)$$

auf natürliche Weise die Möglichkeit bereit, eine unterschiedliche Netztopologie zwischen zwei aufeinanderfolgenden Zeitscheiben zu verwenden. Jedoch bedingt die exakte Integration des Sprungterms die Auswertung der Lösung auf unterschiedlichen Netzen und damit die berechnungstechnisch aufwendige Zuordnung der Elemente auf altem und neuem Netz [Löh08]. Daher erfolgt in der Regel nur eine Auswertung an den Gaußpunkten des neuen Netzes, wodurch die Güte der Integration des Zeitbereichs etwas abnimmt.

Kontinuierliche Verfahren. Allgemein können Netzbewegungsverfahren in kontinuierliche und diskontinuierliche Verfahren unterteilt werden. Die Unterscheidung erfolgt dabei anhand der Art und Weise der Ausbreitung der Randverschiebung in das Berechnungsgebiet. Bei kontinuierlichen Netzbewegungsverfahren findet unter Beibehaltung der Konnektivität die Ausbreitung der Randverschiebung stetig statt und kann prinzipiell das gesamte Berechnungsgebiet erfassen. In der Regel klingt jedoch die Ausbreitung in einiger Entfernung vom bewegten Rand ab, so dass nur randnahe Knoten ihre Position verändern. Algorithmische Grundlage der Ausbreitungsbeschreibung der Knotenverschiebungen können dabei sowohl funktionale Beschreibungen auf heuristischer Basis oder Interpolations- sowie Glättungsansätze sein [Wal99]. Umfassende Verbreitung hat jedoch die Behandlung des Finite-Elemente-Netzes als elastische Pseudo-Struktur erfahren, der die Randverschiebungen aufgeprägt werden [Joh94]. Wesentlich ist hierbei die Wahl der Elementsteifigkeiten, so dass keine Entartung der Elemente im Zuge der Netzbewegung auftritt [Wal02].

Diskontinuierliche Verfahren. Diskontinuierliche Verfahren finden häufig Einsatz bei großen, jedoch geometrisch einfachen Knotenverschiebungen, wie sie bei rein rotatorischen oder translatorischen Bewegungen von Körpern in einem Strömungsgebiet vorliegen. Dabei wird das Gesamtgebiet unterteilt in einen Bereich, der sich mit dem Körper mitbewegt, während

das übrige Gebiet weiterhin in Ruhe verharret. In den beiden entkoppelten Teilgebieten sind die jeweiligen Netze starr. Im Hinblick auf den Informationsaustausch zwischen den Teilnetzen wird unterschieden zwischen volumen- und oberflächengekoppelten diskontinuierlichen Netzbewegungsverfahren [Wal99]. Bei volumengekoppelten Verfahren bewegen sich verschiedene Netze relativ zueinander und tauschen ihre Informationen in den jeweiligen Überlappungsbereichen aus. Bekannte Vertreter dieser Verfahren sind die *Chimera*-Technik [Mea95] und die *Immersed-Boundary*-Methode [Mit05]. Demgegenüber überlappen sich bei oberflächengekoppelten Verfahren die Netze nicht, sondern bewegen sich relativ zueinander entlang ihrer Ränder, über die auch der Informationsaustausch stattfindet. Neben der *Sliding-Mesh*-Technik [Per93] und der *Clicking-Mesh*-Technik [Böh98] hat sich besonders die *Shear-Slip-Mesh-Update*-Methode (SSMUM) von BEHR und TEZDUYAR als geeignet erwiesen, um die Drehbewegung von Starrkörpern in einem Strömungsgebiet berücksichtigen zu können. Im weiteren Verlauf erfolgt die ausführliche Beschreibung der in Abschnitt 5.3 zur Untersuchung der Wasserrad-Durchströmung verwendeten SSMUM sowie ihrer im Rahmen dieser Arbeit entwickelten raum-zeitlichen Erweiterung zur *Space-Time-Shear-Slip-Mesh-Update*-Methode (ST-SSMUM).

3.4.2 SSMUM

Anwendungsgebiet. Die von BEHR und TEZDUYAR entwickelte *Shear-Slip-Mesh-Update*-Methode ist ein oberflächengekoppeltes diskontinuierliches Netzbewegungsverfahren zur Strömungsberechnung auf Gebieten mit beweglichen Rändern oder Grenzflächen, bei denen große, aber geometrisch einfache Verschiebungen auftreten [Beh99, Beh01b, Beh03]. Es ist besonders geeignet zur Berechnung des ein- oder mehrphasigen Strömungsfeldes, das rotierende Strukturen wie Turbinen sowie Wind- oder Wasserräder umgibt. Dazu wird das diskretisierte Berechnungsgebiet in starre, sich nicht verzerrende Bereiche unterteilt, die sich relativ zueinander bewegen und über eine Schicht finiter Elemente miteinander verknüpft sind. Das innere, den rotierenden Körper unmittelbar umgebende Netzgebiet bewegt sich dabei starr mit dem Körper mit, während das äußere Netzgebiet in Ruhe verbleibt. Infolge der Relativbewegung kommt es in der die beiden Netzgebiete verbindenden Schicht zu Schubverzerrungen, die ab einer bestimmten Größe dazu führen, dass eine Neuvernetzung der Elemente des Kopplungsbereichs der Teilgebiete stattfindet. Daher wird diese Schicht auch als *Shear-Slip-Layer* (SSL) bezeichnet, die in der Regel mit nur einer Elementdicke sehr dünn ist, so dass der algorithmische Aufwand der Neuvernetzung vernachlässigbar und der Einsatz bei parallelen Berechnungen und *High Performance Computing* (HPC) möglich ist. Die Neuvernetzung erfolgt dabei nicht als vollständige Generierung eines neuen Netzes (*remeshing*) des SSL, sondern aufgrund des strukturierten Netzcharakters der SSL-Elemente lediglich als vorgegebener Wechsel innerhalb der Knotenkonnektivität der SSL-Elemente (*mesh update*). Dem vorgegebenen Rekonnektierungsvorgang liegt zugrunde, dass die neuen Knoten zum Zeitpunkt des Konnektivitätswechsels die räumlichen Positionen der alten Knoten eingenommen haben, so dass die zugehörigen Lösungswerte nur umgespeichert werden müssen und keine Lösungsprojektion notwendig ist. Ebenfalls entfällt mit der Rekonnektierungsvorgabe die Suche nach der Zuordnung von alten und neuen Elementen, wodurch das *mesh update* wesentlich weniger be-

rechnungsaufwendig ist als ein *remeshing*. Für eine anschauliche und ausführliche Beschreibung der Gebietsunterteilung und der infolge der Relativbewegung auftretenden Schubverzerrungen in den SSL-Elementen siehe [Sch12a] oder [Sun10].

Rekonnektierungsvorgang. Zur besseren Veranschaulichung ist der Konnektivitätswechsel der SSL-Elemente beim Rekonnektierungsvorgang in Abbildung 3.14 exemplarisch für einen Ausschnitt eines mit Rechteckelementen strukturiert vernetzten *Shear-Slip-Layers* dargestellt. Darin gehören die schwarzen, auf der x -Achse liegenden Knoten c bis h zum ruhenden Gebiet, während die farbigen Knoten 1 bis 8 dem sich bewegenden Gebiet angehören und die finiten Elemente mit den römischen Zahlen IV bis VI bezeichnet sind. Zum Zeitpunkt t_n^+ am Beginn

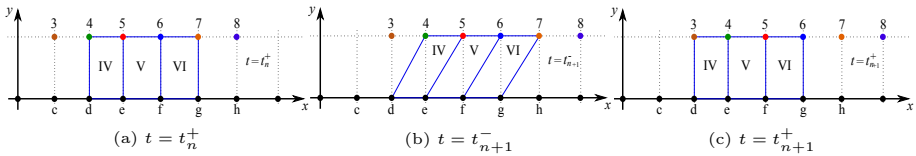


Abb. 3.14: Räumlicher Konnektivitätswechsel der SSL-Elemente

der Zeitscheibe Q_n in Abbildung 3.14a liegen die SSL-Elemente in ihrem Ausgangszustand vor und sind noch unverzerrt. Mit fortschreitender Zeit bewegen sich die farbigen Knoten in positive x -Richtung, so dass am Ende der Zeitscheibe Q_n zum Zeitpunkt t_{n+1}^- die SSL-Elemente deutlich verzerrt sind (vgl. Abbildung 3.14b). Dabei ist die Zeitschrittweite $\Delta t = t_{n+1}^- - t_n^+$ der Bewegungsgeschwindigkeit angepasst, so dass benachbarte Knoten im Laufe ihrer Bewegung die räumliche Position der ihr vorauseilenden Knoten einnehmen. Die Verzerrung der SSL-Elemente macht eine Neuvernetzung notwendig, die zum Ziel hat, die ursprüngliche Elementgeometrie wiederherzustellen. Dies gelingt durch einen Konnektivitätswechsel in den SSL-Elementen, bei dem die sich bewegenden Knoten durch die ihnen nachfolgenden ersetzt werden, so dass zu Beginn der nächsten Zeitscheibe Q_{n+1} zum Zeitpunkt t_{n+1}^+ die neue Konnektivität die Elementgeometrie des Ausgangszustandes erzeugt hat (vgl. Abbildung 3.14c). Im Rahmen einer Raum-Zeit-Diskretisierung findet die Verzerrung der SSL-Elemente und der Rekonnektierungsvorgang nicht nur rein räumlich, sondern im Raum-Zeit-Gebiet statt. In Abbildung 3.15 ist ein repräsentatives SSL-Element für zwei aufeinanderfolgende Zeitscheiben mit stattfindender Rekonnektierung raum-zeitlich dargestellt. Wie auch in Abbildung 3.14 verbleiben die Knoten auf der x -Achse in Ruhe, während sich alle nicht blauen Knoten in positive x -Richtung bewegen. Erkennbar ist das jeweils zu Beginn einer Zeitscheibe unverzerrte, rechteckige räumliche Elementgebiet, das zum Ende der Zeitscheibe rautenförmig wird, wodurch das eigentlich quaderförmige Raum-Zeit-Element verzerrt ist. Am Zeitscheibenübergang erfolgt zwischen den Zeitscheiben Q_n und Q_{n+1} der augenblickliche Konnektivitätswechsel, so dass zum Zeitpunkt t_n die Konnektivität unstetig ist. Auf eine Lösungsprojektion wird jedoch aufgrund übereinstimmender räumlicher Knotenpositionen der sich gegenseitig ersetzenden Knoten verzichtet.

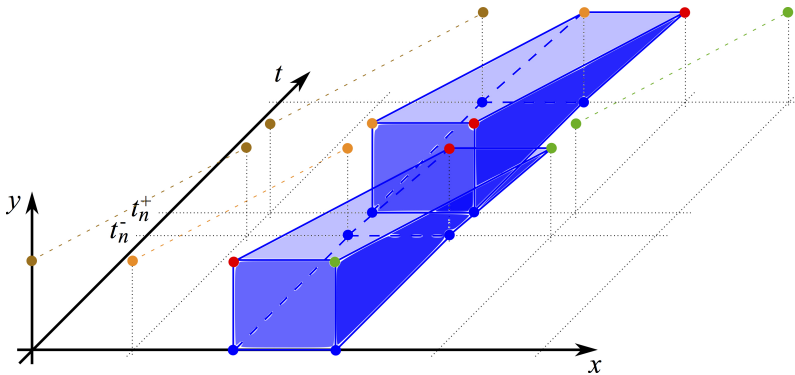


Abb. 3.15: Rekonnectierungsvorgang im Raum-Zeit-Gebiet

Methodische Eigenschaften. Bei der Konstruktion des SSL ist eine strukturierte Netztopologie mit manueller Vorgabe von Elementkantenlänge bzw. Knotenanzahl je SSL-Rand vorteilhaft, so dass bei der Vernetzung die Bewegungsrichtung Berücksichtigung findet und gewünschte Netzcharakteristika auch während der Netzbewegung erhalten werden können. Dabei gewährleistet eine die Bewegungsrichtung berücksichtigende SSL-Vernetzung, dass auch noch unmittelbar vor der anstehenden Rekonnectierung eine akzeptable Qualität der SSL-Elemente vorliegt. Eine strukturierte Vernetzung mit manuellen Vorgaben führt darüber hinaus dazu, dass alle Elemente des SSL dieselbe Geometrie aufweisen und damit im Rahmen der Netzbewegung die gleichen Verzerrungen erleiden. Dadurch genügt es, ein repräsentatives SSL-Element zu betrachten, um die Zeitschrittweite abzustimmen und den Zeitpunkt der Rekonnectierung festzulegen, an dem dann alle SSL-Elemente in gleichem Maße vom Konnektivitätswechsel profitieren. Aufgrund der Forderung nach übereinstimmenden räumlichen Positionen der konnektivitätswechselnden Knoten und der damit verbundenen Abstimmung der Zeitschrittweite, erfolgt die Festlegung des Rekonnectierungszeitpunktes entweder anhand des Zeitpunktes oder über Positionsabgleich der sich bewegenden Knoten. Möglich ist aber auch die Verwendung von Verzerrungskriterien, wie z.B. der Winkeländerung im Element [Sun10]. Für den Rekonnectierungsvorgang ist es notwendig, die Information der sich bewegenden Knoten des SSL in einer geordneten Datenstruktur, z.B. in Listen- oder Matrixform, bereitzustellen, um damit den periodischen Wechsel in der Inzidenzmatrix algorithmisch zu bewerkstelligen. Die dadurch dynamisch gewordenen Datenstrukturen sind bei einer parallelen Berechnung entsprechend zu berücksichtigen, führen aufgrund des nur kleinen Bereichs des SSL jedoch nicht zu einem signifikanten Anstieg des Kommunikationsaufwandes [Beh01b].

Projektionsfehler. Insgesamt erfolgt bei der Rekonnectierung im Rahmen der SSMUM die Neuvernetzung nur im sehr kleinen Bereich des SSL und benötigt aufgrund des vorgegebenen Konnektivitätswechsels unter Zuhilfenahme einer geordneten Datenstruktur keinen Projektionsschritt, so dass sie sehr effizient mit vernachlässigbarem zusätzlichem Berechnungsaufwand durchgeführt werden kann. Gleichzeitig ist infolge der räumlichen Übereinstimmung der miteinander wechselnden Knoten keine Lösungsprojektion notwendig. Der dadurch entstehende

Projektionsfehler verringert zwar geringfügig die Konservativität der numerischen Methode, ist jedoch im Hinblick auf das sehr kleine SSL-Gebiet örtlich begrenzt und somit vernachlässigbar. Eine korrekte Projektion der Lösung vom alten auf das neue Netz ist in Kombination mit der Raum-Zeit-Finite-Elemente-Methode, bei der die Lösungsübertragung über den Sprungterm gewährleistet wird, prinzipiell möglich, führt jedoch zu einer deutlichen Erhöhung des Berechnungsaufwandes ohne nennenswerten Genauigkeitsgewinn.

Erweiterungen. Eine Erweiterung der SSMUM zur Berücksichtigung auch elastischer Rotationskörper findet sich in [Sun10], während die Berücksichtigung von unstrukturierten Netzen und beliebigen Rotationen in drei Dimensionen in [Sch15] erfolgt ist. Das von BEHR und TEZDUYAR in [Beh99] eingeführte Vorgehen zur Berücksichtigung von stetigen Drehbewegungen starrer Körper hat sich jedoch sowohl für einphasige Strömungen in [Sch13] als auch für 2-Phasen-Strömungen in [Sch14] für die Untersuchungsziele dieser Arbeit als ausreichend geeignet erwiesen und kommt daher in Abschnitt 5.3 zur Untersuchung von Wasserrad-Durchströmungen zur Anwendung.

3.4.3 ST-SSMUM

Weiterentwicklung. Zur Vermeidung der Schwierigkeiten bei der im Rahmen der SSMUM erfolgenden Auswertung des Sprungterms und der damit gewöhnlich einhergehenden Einführung eines Projektionsfehlers wurde die SSMUM für den speziellen Einsatz bei Raum-Zeit-Finite-Elemente-Formulierungen erweitert [Sch12b, Sch12c, Sch12a]. Die Weiterentwicklung wird daher als *Space-Time-Shear-Slip-Mesh-Update*-Methode (ST-SSMUM) bezeichnet. Infolge des bei der SSMUM am Zeitscheibenübergang stattfindenden Konnektivitätswechsels sind die beiden Anteile des die Lösung übertragenden Sprungterms auf unterschiedlichen Netztopologien mit jeweils eigenen Funktionsräumen definiert. Die integrale Lösungsübertragung des Sprungterms gewährleistet *a priori* nur eine globale Erhaltung der Zustandsgrößen. Eine lokale Konservativität ist zusätzlich erzielbar, bedingt aber identische Funktionsräume [Giu92]. Insgesamt führt die bei der SSMUM lediglich punktweise Übertragung der Zustandsgrößen in Kombination mit den am Zeitscheibenübergang verschiedenen Funktionsräumen sowie der in der Regel nur die neue Netztopologie berücksichtigenden Integration des Sprungterms zu einem Projektionsfehler und einer Verringerung der Erhaltungseigenschaften der numerischen Methode. Daher findet im Rahmen der ST-SSMUM der räumliche Konnektivitätswechsel entgegen dem Vorgehen der SSMUM, bei der dieser am Übergang von einer zur nächsten Zeitscheibe erfolgt, innerhalb einer Zeitscheibe statt, so dass am Zeitscheibenübergang die räumliche Konnektivität aufeinanderfolgender Zeitscheiben übereinstimmt. Der innerhalb einer Zeitscheibe stetig stattfindende räumliche Konnektivitätswechsel der SSL-Elemente führt zu unterschiedlichen räumlichen Konnektivitäten am Anfang und Ende der Zeitscheibe. Im Raum-Zeit-Gebiet stellt dies jedoch keinen Konnektivitätswechsel dar, sondern es wird lediglich die natürliche Möglichkeit von Raum-Zeit-Elementen genutzt, am Anfang und Ende der Zeitscheibe eine unterschiedliche räumliche Vernetzung aufzuweisen. Die Beibehaltung derselben räumlichen Konnektivität am Zeitscheibenübergang ermöglicht ohne zusätzlichen Aufwand eine korrekte Auswertung des Sprungterms, so dass die Erhaltungseigenschaften der numerischen Methode unbeeinflusst bleiben. Der algorithmisch aufwendige und fehlerbehaftete Projektionsschritt wird nicht notwendig.

Rekonnektierungsvorgang. Der bei der ST-SSMUM innerhalb einer Zeitscheibe stetig stattfindende räumliche Konnektivitätswechsel ist für ein repräsentatives SSL-Element in Abbildung 3.16 in seinem raum-zeitlichen Verlauf dargestellt. Wie auch in Abbildung 3.15 verbleiben die Knoten auf der x -Achse in Ruhe, während sich alle nicht blauen Knoten stetig in positive x -Richtung bewegen. Aufgrund der Knotenbewegung wird das Element verzerrt und geht von einer rechteckigen räumlichen Geometrie am Anfang der ersten Zeitscheibe in eine parallelogrammförmige Geometrie zum Ende der Zeitscheibe über. In der nachfolgenden Zeitscheibe, die am Anfang die räumliche Knotenkonnektivität der vorangegangenen Zeitscheibe übernimmt, findet dann der räumliche Konnektivitätswechsel zum Ende der Zeitscheibe hin statt. Dieser erfolgt bei der ST-SSMUM in den SSL-Elementen derart, dass er der stattfindenden Knoten-Bewegungsrichtung entgegenwirkt und so die am Anfang der Zeitscheibe noch vorhandene Verzerrung der SSL-Elemente zum Ende hin verringert bzw. bei entsprechender Zeitschrittweite sogar vollständig aufhebt. Damit ist es unter Ausnutzung der raum-zeitlichen Struktur des Berechnungsgebietes möglich, zum Ende der Zeitscheibe hin eine noch am Anfang der Zeitscheibe räumlich verzerrte Elementgeometrie wieder zu entzerren.

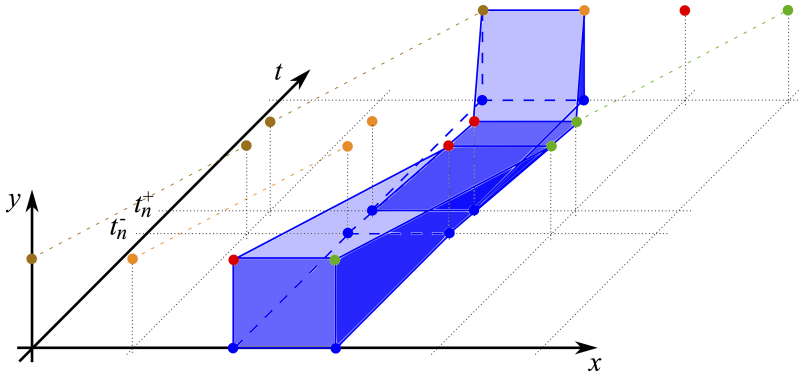


Abb. 3.16: Räumlicher Konnektivitätswechsel innerhalb einer Zeitscheibe

Elementdurchdringung. Das Haupteinsatzgebiet sowohl der SSMUM als auch der ST-SSMUM ist die Strömungsberechnung bei rotierenden Strukturen wie Turbinen sowie Wind- oder Wasserrädern. Damit ist die Geometrie des sich drehenden Netzgebietes kreisförmig im zweidimensionalen oder besitzt im dreidimensionalen eine Zylinder- oder Kugelform. Werden dabei der Rand des sich drehenden Netzgebietes und seine Drehbewegung nicht exakt beschrieben, so kommt es zur Durchdringung von SSL-Elementen mit den ihnen angrenzenden Elementen des sich drehenden Netzgebietes. In Abbildung 3.17 ist diese Durchdringung auszugsweise bei einem SSL-Element dargestellt. In der Abbildung gehört das obere Element zum SSL und ändert im Laufe der Zeitscheibe seine räumliche Konnektivität, so dass zum Zeitscheibenende die räumliche Geometrie wieder unverzerrt vorliegt. Dabei durchdringt es anteilig zwei der sich unter ihm befindenden Elemente, die zum rotierenden Netzgebiet gehören. Zur Elementdurchdringung kommt es aufgrund der nur bei den SSL-Elementen wechselnden räumlichen Konnektivität vom Anfang zum Ende der Zeitscheibe. Dadurch liegt die lokale Zeitkoordinate

der SSL-Elemente nicht parallel zu derjenigen der Elemente, deren räumliche Konnektivität innerhalb der Zeitscheibe unverändert bleibt. Die Elementdurchdringungen führen zu einer Variation des diskretisierten raum-zeitlichen Elementvolumens. Vom Anfang der Zeitscheibe bis zur Mitte erfolgt eine Zunahme, der dann bis zum Ende der Zeitscheibe wieder eine Abnahme auf die Ausgangsmenge folgt. Das zwischenzeitlich vorhandene größere Elementvolumen äußert sich in unphysikalischen Fluktuationen der Zustandsgrößen innerhalb der betroffenen Zeitscheibe und stellt einen Energiefehler der numerischen Methode dar [Sch12a].

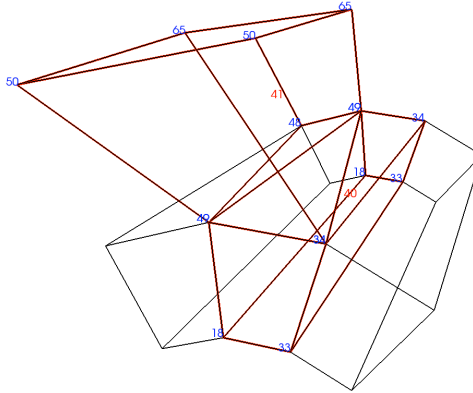


Abb. 3.17: Elementdurchdringung beim räumlichen Konnektivitätswechsel

Verbesserungsvorschläge. Grundsätzlich ermöglicht die ST-SSMUM unter Ausnutzung der besonderen Eigenschaften einer Raum-Zeit-Formulierung, den unverzerrten Ausgangszustand der SSL-Elemente innerhalb einer Zeitscheibe wiederherzustellen. Dabei werden jedoch erhöhte Anforderungen an die geometrische Beschreibung des SSL und ihm benachbarter Elemente gestellt. Bei nicht exakter Diskretisierung des gekrümmten Randes des rotierenden Netzgebietes tritt eine Elementdurchdringung auf, der jedoch durch angepasste Elementintegration oder spezielle Formfunktionen entgegengewirkt werden kann [Sch12a]. Mittels Unterteilung der von Durchdringung betroffenen Elemente in Simplex-Unterstrukturen und einer Auswertung der Elementintegrale innerhalb dieser Simplexes kann eine angepasste Integration durchgeführt werden, in der die sich überschneidenden Gebietsanteile keine Berücksichtigung finden. Nachteilig ist bei diesem Vorgehen die partielle Veränderung des Ansatzraumes sowie die Erhöhung des Berechnungsaufwandes bei der Auswertung der Elementintegrale infolge der Unterteilung in Substrukturen. Stattdessen ist auch die Verwendung angepasster Formfunktionen (z.B. NURBS) möglich, die in der Lage sind, die gekrümmte räumliche Geometrie und die Drehbewegung exakt abzubilden, so dass benachbarte Elemente durchdringungsfrei aneinander vorbeigleiten können. Dabei kann dies in der betroffenen Zeitscheibe beschränkt werden auf den SSL und seine unmittelbar angrenzenden Elemente im drehenden Netzgebiet. Infolge der starken örtlichen und zeitlichen Begrenzung erhöht sich so der Berechnungsaufwand nur geringfügig.

3.4.4 Rotierender Starrkörper

Berechnungsgebiet. Zur Untersuchung des Einflusses der in Abschnitt 3.4.2 vorgestellten SSMUM erfolgt deren Umsetzung für die Berechnung des Mischvorganges von zwei Fluiden mittels eines drehenden Starrkörpers. Das Berechnungsbeispiel stellt eine Erweiterung des in [Beh03] vorgestellten *Benchmarks* auf 2-Phasen-Strömungen dar und dient der Vorbereitung für die in Abschnitt 5.3 stattfindende Verwendung der SSMUM bei der Untersuchung der Durchströmungsvorgänge von Schaufelwasserrädern. Als Strömungsgebiet des Testbeispiels wird das Einheitsquadrat verwendet, in dessen Zentrum sich ein 50 cm hoher und 10 cm breiter Starrkörper mit abgerundeten Ecken (Ausrundungsradius 2.5 cm) befindet. Diesen umgibt mit einem Innenradius von 28 cm ein 1 cm dicker Kreisring, so dass das Gesamtgebiet in ein ruhendes Außen- und ein sich mit dem Starrkörper mitdrehendes Innengebiet unterteilt wird.

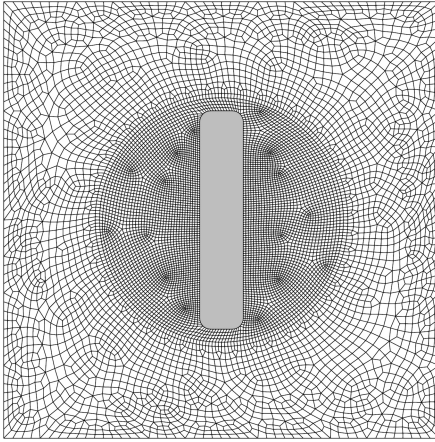


Abb. 3.18: Vernetzung

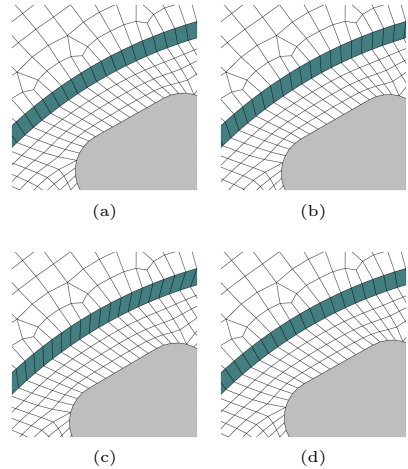


Abb. 3.19: Netzbewegung

Das vernetzte Gebiet ist in Abbildung 3.18 dargestellt. Es besteht insgesamt aus 8966 Elementen mit 9174 Knoten, wobei sich mit 5280 Elementen der überwiegende Teil davon im Innengebiet befindet, während das größere Außengebiet mit 3438 Elementen gröber vernetzt ist. Der zwischen beiden Gebieten vermittelnde SSL ist in 248 Elemente unterteilt und ist in Abbildung 3.19 farblich hervorgehoben. Daneben ist der innere Gebietsrand des Starrkörpers mit 224 Elementen gleichförmig vernetzt, von denen sich jeweils 88 Elemente auf den Längsseiten und 24 Elemente auf den kurzen Seiten inklusive der ausgerundeten Eckbereiche befinden. Die vier Ränder des Außengebietes sind in jeweils 48 Elemente unterteilt, so dass ausgehend vom SSL eine Vergrößerung der Vernetzung hin zu den Außenrändern stattfindet.

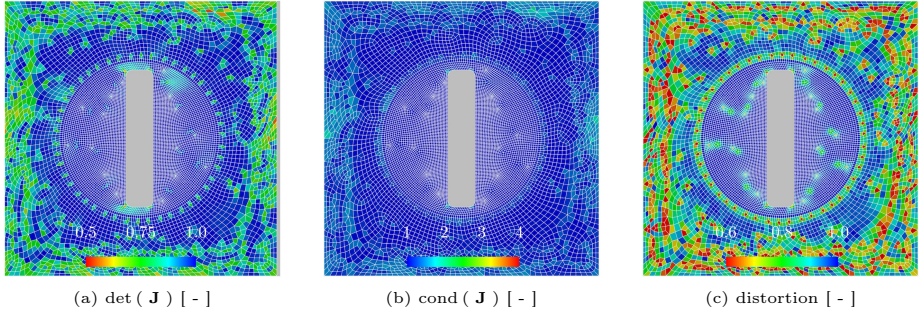


Abb. 3.20: Netzqualität

Netzqualität. Sowohl im Innen- als auch im Außengebiet wird eine unstrukturierte Vernetzung mit linearen Rechteckelementen umgesetzt, während der SSL für die in ihm stattfindende und mit der Netzbewegung einhergehende Elementverzerrung strukturiert vernetzt ist. Infolge der mit Hilfe des Programmsystems *CUBIT 13.2* vorgenommenen Vernetzung ist eine Überprüfung der erzielten Elementqualität notwendig [Knu00a, Knu00b, Knu01, She02, Lew12]. In Abbildung 3.20 sind die wesentlichen Kennzahlen für eine Beurteilung der Güte der erzeugten Elemente infolge ihrer Abweichung von der räumlichen Idealgestalt dargestellt. Ihre Ermittlung erfolgt unter Verwendung der Verifikationsbibliothek *Verdict* [Sti07]. Dabei gibt die in Abbildung 3.20a dargestellte skalierte Determinante der JAKOBI-Matrix $\det(\mathbf{J})$ die Güte der Lösungsabbildung vom Referenz- auf das tatsächliche Elementgebiet an. Ein gutes Abbildungsverhältnis liegt hierbei im Bereich $0.5 \leq \det(\mathbf{J}) \leq 1.0$. Nicht ausreichend gute Werte der skalierten JAKOBI-Determinante wirken sich lokal in der Strömungslösung aus. Demgegenüber haben Elemente mit einer Konditionszahl $\text{cond}(\mathbf{J}) \geq 4.0$ einen negativen Einfluss auf die Kondition der Gesamtsystemmatrix. Hierbei kann bereits ein einzelnes schlecht konditioniertes Element die Kondition des Gesamtsystems herabsetzen. Jedoch zeigt die Auswertung in Abbildung 3.20b, dass sämtliche Elemente im guten, zulässigen Bereich liegen. Neben den beiden vorwiegend mathematisch orientierten Kennzahlen mit Bezug zur JAKOBI-Matrix \mathbf{J} kann auch noch die Elementverzerrung selbst quantifiziert und als anschauliches Maß zur Beurteilung der Netzqualität herangezogen werden. In Abbildung 3.20c ist zu erkennen, dass einige Elemente des äußeren Gebietes im Übergangsbereich zur gröberen Randvernetzung am unteren Ende des zulässigen Wertebereichs liegen. Demgegenüber weisen jedoch die Elemente im für die Strömungsvorgänge wesentlichen Nahbereich des drehenden Starrkörpers eine durchweg zulässige Verzerrung auf. Die Elementverzerrung gibt analog zur Maßzahl der JAKOBI-Determinante $\det(\mathbf{J})$ einen Hinweis auf das Abbildungsverhalten vom Referenzelement auf das tatsächliche Elementgebiet und die damit verbundene Lösungsdarstellung. Jedoch ist das Verzerrungsmaß mit seinem beschränkteren Zulässigkeitsbereich sensitiver als die Maßzahl der JAKOBI-Determinante. In der Regel treten zu stark verzerrte Elemente in Eckbereichen komplexer Geometrien sowie in Netzaufweitungs- und -verfeinerungsgebieten auf.

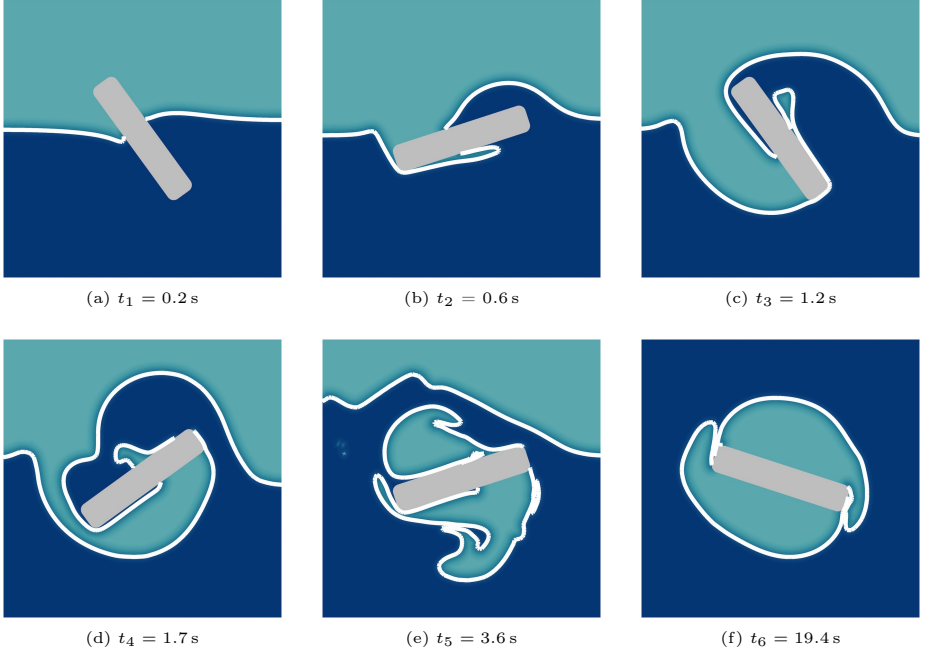


Abb. 3.21: Materialverteilung

Parameter. Das Gebiet ist im Ausgangszustand jeweils hälftig im unteren Bereich mit einer Wasserphase ($\rho_1 = 1000 \text{ kg/m}^3$, $\mu_1 = 1 \text{ (Ns)/m}^2$) und im oberen Bereich mit einer Luftphase ($\rho_2 = 1 \text{ kg/m}^3$, $\mu_2 = 0.01 \text{ (Ns)/m}^2$) belegt, deren Gebiete von einer horizontal verlaufenden Grenzfläche getrennt sind und keiner Erdbeschleunigung unterliegen. Auf allen vier äußeren Rändern liegen *slip*-Randbedingungen vor, während auf dem Rand des drehenden Starrkörpers *no-slip*-Randbedingungen gesetzt sind. Das Druckniveau ist am oberen Rand im Mittelknoten mit $\bar{p} = 0 \text{ N/m}^2$ gesetzt.

Netzbewegung. Die Drehbewegung des Starrkörpers läuft mit einer festen Winkelgeschwindigkeit von $\omega = \pi \text{ s}^{-1}$ entgegen dem Uhrzeigersinn ab. Sämtliche Elemente des Innengebietes bewegen sich dabei starr mit dem Körper mit, während das Außengebiet in Ruhe verhaart. Dadurch tritt die gesamte Netzdeformation nur im SSL auf. Im Hinblick auf die Geometrie der SSL-Elemente erfolgt unter Berücksichtigung der Drehgeschwindigkeit ω und der gewählten, festen Zeitschrittweite von $\Delta t = 1.613 \times 10^{-3} \text{ s}$ alle 5 Zeitschritte ein Konnektivitätswechsel im SSL. Alternativ zur Wahl eines in Abhängigkeit der Zeitschrittweite festen Rekonnektierungsintervalls könnte die Entscheidung, ob und wann ein Konnektivitätswechsel erfolgen soll, auch unter Berechnung der aktuellen Elementverzerrung erfolgen (vgl. [Sun10]). Jedoch führt

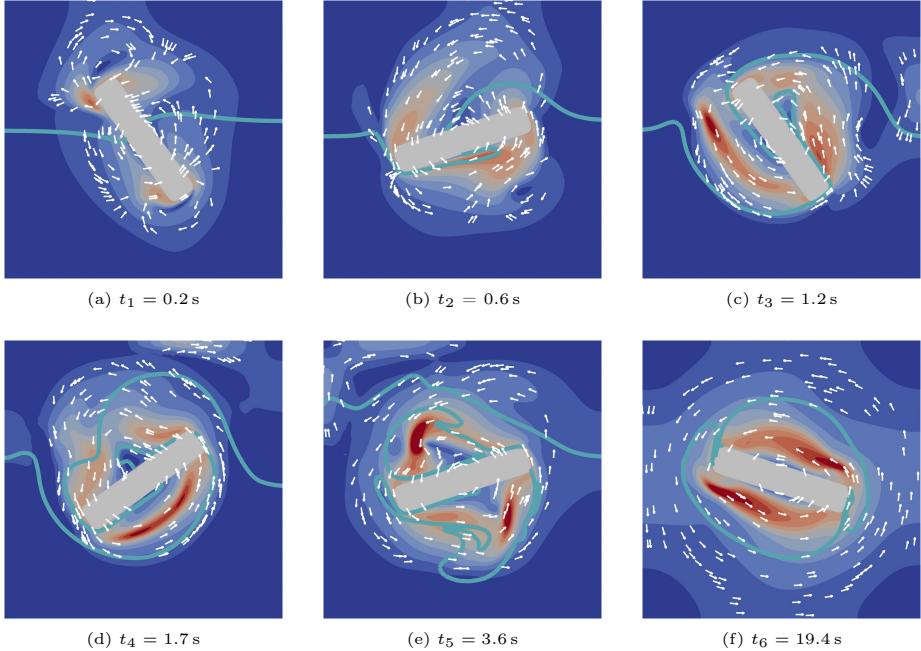
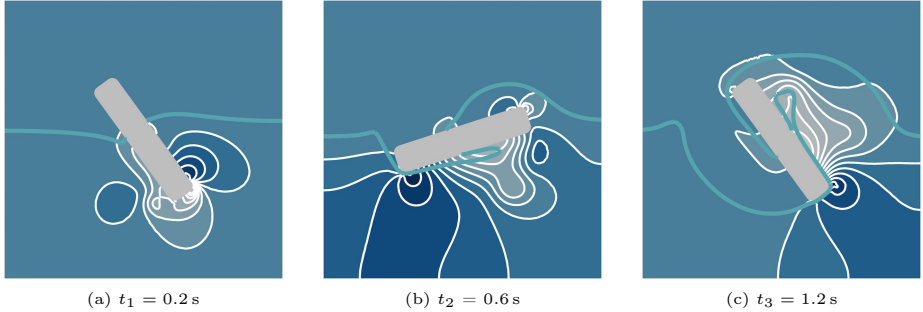


Abb. 3.22: Geschwindigkeitsfeld ($0.0 \text{ m/s} \leq \|\mathbf{v}\| \leq 1.2 \text{ m/s}$)

dies zu zusätzlichem Berechnungsaufwand und bietet bei einer festen Drehgeschwindigkeit keinen Vorteil. Darüber hinaus wäre die Zeitschrittweite entsprechend der Drehgeschwindigkeit und der Kantenlänge der SSL-Elemente zu beschränken, um eine übermäßig starke Verzerrung der SSL-Elemente bei variablem Rekonnektierungsintervall zu unterbinden.

Mischungsvorgang. Unmittelbar nach dem Anfahen der Drehbewegung beginnt der Starrkörper beide Fluidphasen miteinander zu vermischen. In Abbildung 3.21 ist für den Zeitraum von $0 \text{ s} \leq t \leq 20.0 \text{ s}$ für sechs ausgewählte Zeitpunkte der jeweilige Zustand dargestellt. Direkt nach dem Einsetzen der Drehbewegung (Abbildung 3.21a) beginnt der rotierende Starrkörper die vormals gerade verlaufende Grenzfläche zu deformieren. Dabei drückt er sowohl Wasser in das Gebiet der Luftphase als auch wird eine Luftblase im Wassergebiet eingeschlossen (Abbildung 3.21b). Nach einer halben Drehung (Abbildung 3.21c) ist bereits eine wesentliche Wassermenge vom Starrkörper in das Luftgebiet bewegt worden, so dass Luftpartikel nachströmen können. Die offene Verbindung zur Luftphase wird jedoch nach einer weiteren Vierteldrehung (Abbildung 3.21d) wieder nahezu vom vor dem Starrkörper hergetriebenen Wasser geschlossen. Nach einigen weiteren Umdrehungen ist in Abbildung 3.21e eine deutliche Vermischung der beiden Fluidphasen erkennbar. Dabei deutet sich an, dass die leichtere Luftphase sich in

Abb. 3.23: Druckfeld ($-3 \text{ hPa} \leq p \leq 3 \text{ hPa}$)

der unmittelbaren Umgebung des drehenden Starrkörpers beginnt zu konzentrieren, während die schwerere Wasserphase von der Zentrifugalkraft nach außen getrieben wird. Im Endzustand (Abbildung 3.21f) ist die Trennung der beiden Fluidphasen abgeschlossen und deutlich erkennbar. Bei der Drehung kommen jedoch die Spitzen des drehenden Starrkörpers noch ab und zu in Kontakt mit der Grenzfläche und reißen dabei einzelne Partikel von der Wasserphase los, so dass Wassertropfen von Zeit zu Zeit in der Luftphase vorliegen.

Strömungsfeld. Zugehörig zu den Mischungszuständen sind in den Abbildungen 3.22 und 3.23 die Geschwindigkeits- und Druckfelder dargestellt. Im Geschwindigkeitsfeld sind besonders im Anfangszustand (Abbildungen 3.22a und 3.22b) die Geschwindigkeitsspitzen im Bereich der beiden kurzen Seiten des drehenden Starrkörpers gut erkennbar, welche zu vorerst noch lokal begrenzten Wirbelbildungen führen. Im weiteren Verlauf liegen in der Luftphase beim Nachströmen in das Wassergebiet höhere Strömungsgeschwindigkeiten vor (Abbildungen 3.22c und 3.22d), während die Strömungsgeschwindigkeiten in den entsprechenden Bereichen der Wasserphase geringer verbleiben. Mit zunehmender Durchmischung der Fluidphasen breitet sich die Strömung auf das gesamte Gebiet aus (Abbildungen 3.22e und 3.22f), lediglich die Eckbereiche verbleiben in Ruhe. Dabei bewegen sich sowohl Wasser- als auch Luftphase gleichsinnig in Übereinstimmung mit der Drehung des Starrkörpers, wobei die Strömungsgeschwindigkeit infolge des Randeinflusses mit zunehmender Entfernung vom Starrkörper weg abnimmt. Auch im Druckfeld wirkt sich die unterschiedliche Materialverteilung aus. In Abbildung 3.23a ist deutlich der gedrängte Isobarenverlauf in der Wasserphase zu erkennen, während in der Luftphase infolge der geringeren Dichte die Drehbewegung zu keinem nennenswerten Gradienten im Druckfeld führt. Gut sichtbar ist ebenfalls der Überdruck auf der Vorderseite des Starrkörpers und das Unterdruckgebiet, das an der kurzen Seite bei der Umströmung in der Wasserphase entsteht. Das Auftreffen der gegenüberliegenden Spitze auf die Grenzfläche in Abbildung 3.23b bewirkt ein ausgeprägtes Überdruckgebiet, das begleitet wird von einem sich um die eingeschlossene Luftblase legenden Unterdruckgebiet. Demgegenüber sind die Druckgebiete auf der sich in die Luftphase bewegenden Seite deutlich geringer. Auch im weiteren Verlauf der Drehbewegung (Abbildung 3.23c) dominiert das Überdruckgebiet an der

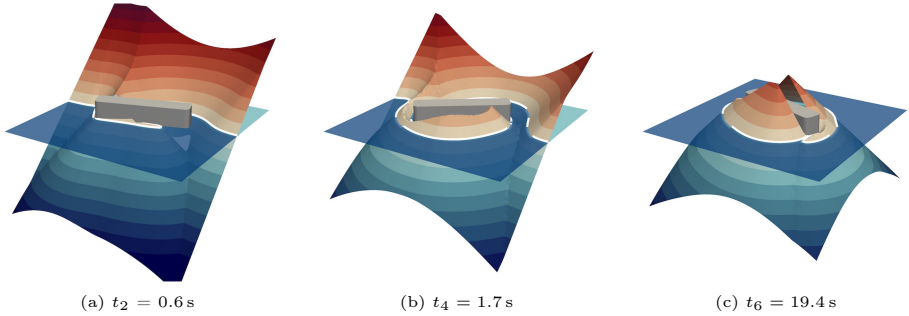
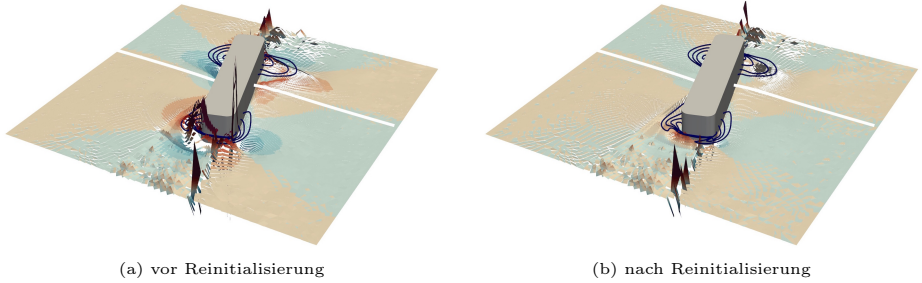


Abb. 3.24: *Level-Set*-Feld mit Materialverteilung und Grenzflächenlage

Spitze des Starrkörpers, die die Wasserphase in das Luftgebiet bewegt, während in der Umgebung der eingeschlossenen Luftblase ein niedrigerer Druck fortgesetzt vorherrscht. Sowohl im Geschwindigkeits- als auch im Druckfeld kann ein nachteiliger Einfluss der Netzbewegung im Bereich des SSL nicht beobachtet werden. Die gewählte Vernetzung gewährleistet zu jedem Zeitpunkt eine gute Übertragung und Abbildung der Lösungsfelder über den SSL hinweg. Dies gilt insbesondere auch jedes Mal für den Zustand unmittelbar vor dem anstehendem Konnektivitätswechsel, in dem das Netz des SSL maximal verzerrt ist.

Grenzflächenlage. Neben dem Einfluss der Netzbewegung können Art und Weise sowie Häufigkeit des Reinitialisierungsvorganges der *Level-Set*-Funktion Einfluss auf die Abbildungsqualität der Lösungsfelder haben. Dabei erfolgt in Abhängigkeit der *Level-Set*-Funktion die Gebietsunterscheidung und damit die Zuordnung der Materialparametersätze sowie deren Übergangsbereich. Eine degenerierte *Level-Set*-Funktion führt zu einer nicht korrekten Wiedergabe von Form und Lage der Grenzfläche und damit auch zu einem Fehler in den Materialmengenverhältnissen. In Abbildung 3.24 ist das *Level-Set*-Feld über dem Materialgebiet mit seiner zugehörigen Lage der Grenzfläche für die drei ausgewählten Zeitpunkte t_2 , t_4 und t_6 dargestellt. Die Reinitialisierung erfolgt hierbei wie auch für die in den Abbildungen 3.21, 3.22 und 3.23 dargestellten Lösungszustände nach jedem fünften Zeitschritt. Am Anfang des Drehvorganges zum Zeitpunkt t_2 besitzt die Grenzfläche mit Ausnahme der eingeschlossenen Luftblase eine noch relativ fortlaufende Gestalt (Abbildung 3.24a). Dies spiegelt sich in einem vorwiegend als schiefe Ebene verlaufenden *Level-Set*-Feld wieder. Mit fortschreitender Drehung verändert die sich am rotierenden Starrkörper zu konzentrieren beginnende Luftphase die Form des *Level-Set*-Feldes (Abbildung 3.24b), wodurch es zu einer immer stärkeren Abweichung von der Gestalt der schiefen Ebene kommt. Schlussendlich hat das *Level-Set*-Feld zum Ende der Berechnung die in Abbildung 3.24c dargestellte Kegelform angenommen, deren Null-Isokontur die annähernd kreisförmige Grenzflächenlage beschreibt. Eine wesentliche, aus der Abstandsdefinition folgende Eigenschaft der *Level-Set*-Funktion ist ihr einheits-normierter Gradientenverlauf, $\|\nabla \phi\| = 1$, der in Abbildung 3.25 sowohl unmittelbar vor als auch nach dem Reinitialisierungsvorgang kurz nach Einsetzen der Drehbewegung dargestellt ist. Dabei

Abb. 3.25: Gradient *Level-Set*-Feld mit Geschwindigkeitsisolinien und Grenzflächenlage

wird die unmittelbar vor der Reinitialisierung bereichsweise degenerierte *Level-Set*-Funktion anhand ihres Gradientenverlaufs erkennbar (Abbildung 3.25a). Die Entartung tritt besonders in den Gebieten auf, in denen hohe Gradienten im Geschwindigkeitsfeld vorliegen, so dass die Abweichung vom Einheitswert an den beiden Spitzen des Starrkörpers beginnt. Unmittelbar nach der Reinitialisierung ist das Gradientenfeld der *Level-Set*-Funktion wieder deutlich glatter (Abbildung 3.25b), es verbleiben jedoch vom Einheitswert abweichende Stellen in den Bereichen, in denen der Abstand zu verschiedenen Punkten der Grenzfläche nahezu identisch ist und damit ein Sattelpunkt im *Level-Set*-Feld vorliegt.

Reinitialisierungseinfluss. Neben dem *Level-Set*-Feld und dem davon abgeleiteten Gradientenfeld ist auch der Einfluss des Reinitialisierungsintervalls untersucht worden. Zusätzlich zu dem den dargestellten Lösungsfeldern zugrunde liegendem Reinitialisierungsintervall von $n\text{ReIni} = 5 \Delta t$ sind in Abbildung 3.26 für drei unterschiedliche Zeitpunkte die Grenzflächenverläufe für die Intervalle $n\text{ReIni} = 1, 50, 100$ dargestellt. Deutlich erkennbar ist, dass ein geringfügig abweichender Verlauf der Grenzflächenlage nur in zwei begrenzten Bereichen vorliegt, während der überwiegende Verlauf in allen drei Fällen fast identisch wiedergegeben wird.

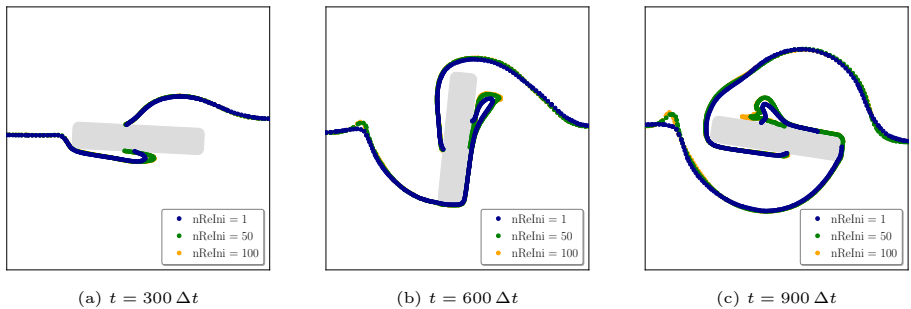


Abb. 3.26: Einfluss Reinitialisierungsintervall auf Grenzflächenlage

4 Überfallschütz

Nach erfolgter Zusammenstellung der mechanischen Modellierung von 2-Phasen-Strömungen und ihrer Diskretisierung mit Hilfe der Raum-Zeit-Finite-Elemente-Methode in den vorangegangenen beiden Kapiteln findet nun die Anwendung des entwickelten Berechnungsmodells zur Untersuchung der Strömungsvorgänge an einem Überfallschütz statt. Bei der Überströmung des Schützes kommt es ab Überstreichen der Schützkrone und insbesondere im Unterwasser zu einer starken Vermischung von Wasser und Luft. Dies bewirkt neben der bereits vorliegenden komplexen Schützgeometrie eine deutliche Erhöhung der Anforderungen bei der numerischen Berechnung der auftretenden Strömungsphänomene. Daher wurden im Rahmen dieser Arbeit auch begleitende experimentelle Untersuchungen zur Validierung der numerischen Ergebnisse durchgeführt.

In Abschnitt 4.1 erfolgt zunächst die Einordnung von Schützüberströmungen im Rahmen der Theorie der Gerinneströmung und der Überströmung von Überfallbauwerken. Daran anschließend werden in Abschnitt 4.2 die Rahmenbedingungen und Beobachtungsergebnisse des begleitenden Versuchsprogramm vorgestellt. Die experimentellen Ergebnisse dienen zum Vergleich und zur Validierung der durchgeführten numerischen Untersuchungen. Aufbauend auf den theoretischen Grundlagen und den experimentellen Beobachtungen findet dann in Abschnitt 4.3 die numerischen Untersuchung der Schützüberströmung statt. Ausführlich werden die am Überfallschütz beobachteten verschiedenen Strömungszustände dargestellt und analysiert. Abschließend erfolgt die Ergebniszusammenfassung der durchgeführten numerischen Parameterstudien im Hinblick auf die Variation der physikalischen Parameter sowie der Schützgeometrie.

4.1 Theoretische Grundlagen

4.1.1 Gerinneströmungen

Allgemeines. Schützüberströmungen erfolgen in einem Gerinne und stellen eine besondere Form von 2-Phasen-Strömungen dar. Unter Schwerkrafteinfluss bildet sich eine Schichtenströmung zwischen Wasser und Luft, welche auch als reine Wasserströmung mit freier Oberfläche aufgefasst werden kann, wobei dann die Dynamik der Luftströmung infolge ihrer wesentlich geringeren Dichte vernachlässigt wird. Freispiegelströmungen in offenen Gerinnen weisen in ihrem physikalischen Verhalten eine große Nähe zu Rohrströmungen auf, wobei die Schwerkraft die Strömung antreibt und im stationären Zustand kein Druckgefälle in Strömungsrichtung vorherrscht. Die Betrachtung einer Gerinneströmung als teilgefüllte Rohrströmung ermöglicht die Übertragung der theoretischen Beschreibung unter Berücksichtigung der asymmetrischen Geschwindigkeits- und Druckfelder [Zan13]. Die Wassertiefe h tritt als weitere Zustandsgröße hinzu, wodurch die theoretische Beschreibung und Lösungsfindung aufwendiger wird, so dass auch verstärkt empirische Untersuchungsergebnisse hinzugezogen werden müssen. In der analytischen Beschreibung haben sich als Zustandsgrößen zur Beschreibung von Freispiegelströmungen die Wassertiefe h , die spez. Durchflussmenge $q = Q/b$ und die spez. Energie $h_e = v^2/(2g) + h$ als geeignet erwiesen [Tru08], [Nau92]. Das Abflussverhalten als Beziehung zwischen Durchflussmenge bzw. mittlerer Strömungsgeschwindigkeit und Strömungswiderstand wird anhand sog. Fließformeln beschrieben. Dabei sind jeweils zwei Strömungszustände mit konjugierten Wassertiefen möglich.

Abflussverhalten. Das Fließverhalten von Freispiegelströmungen kann unter Berücksichtigung lokaler Beschleunigungen sowohl räumlich als auch bei wellenartigen Bewegungen zeitlich veränderlich sein. Für den Fall eines Normalabflusses ist es jedoch in der Hydraulik durch Gleichgewichtsbetrachtung an einem Gerinneabschnitt möglich, das Fließverhalten zusammenfassend in einer sog. Fließformeln zu beschreiben, welche die mittlere Strömungsgeschwindigkeit v in Beziehung zu den Strömungswiderständen setzt. Ergebnis der Gleichgewichtsbetrachtung ist die Fließformel nach CHEZY:

$$v = C \sqrt{R_h I_S} \quad \text{mit} \quad C = \sqrt{\frac{8g}{\lambda}}. \quad (4.1)$$

Dabei ist C der Geschwindigkeitsbeiwert, R_h der hydraulische Radius und I_S das Sohlgefälle. Der Geschwindigkeitsbeiwert wird auf den Reibungsbeiwert λ der Rohrströmung zurückgeführt, so dass die Fließformel nach CHEZY sich direkt aus dem DARCY-WEISSBACHSchen Widerstandsgesetz der Rohrströmung ableitet. In Abhängigkeit eines laminaren oder turbulenten Strömungszustandes sind im Geschwindigkeitsbeiwert sämtliche Einflüsse aus Reibung und Geometrie erfasst. Für den praktischen Gebrauch existieren eine Vielzahl an empirischen Fließformeln, die sich in der Ermittlung der entsprechenden Beiwerte unterscheiden. Die weiteste Verbreitung hat die Fließformel nach MANNING-STRICKLER, welche als Erweiterung der Fließformeln nach CHEZY aufgefasst werden kann:

$$Q = A k_{St} R_h^{2/3} I_S^{1/2} \quad \text{mit} \quad k_{St} = \frac{C}{R_h^{1/6}}. \quad (4.2)$$

In ihr ist der STRICKLER-Beiwert k_{St} dimensionsabhängig. Für weitere Fließformeln und deren Einsatzbereiche und Anwendungsrenzen siehe u.a. [Nau92]. Zur Validierung können die berechneten Durchflussmengen für unterschiedliche Wasserstände mit *in situ* ermittelnden Pegelkurven abgeglichen werden. Die aus den Fließformeln berechnete mittlere Strömungsgeschwindigkeit gibt die Veränderlichkeit des Geschwindigkeitsprofils nicht wieder. Das komplexe Profil ist nur durch aufwendige empirische Untersuchungen ermittelbar oder heutzutage auch mit zunehmender Leistungsfähigkeit der Computertechnik näherungsweise unter Verwendung von Berechnungsprogrammen, sofern Anfangs- und Randbedingungen geeignet festgelegt werden können.

Fließzustände. Neben der Charakterisierung des räumlich und zeitlich veränderlichen Fließzustandes anhand der REYNOLDS-Zahl Re tritt bei Freispiegelströmungen die FROUDE-Zahl Fr als dimensionslose Kennzahl hinzu. Während die REYNOLDS-Zahl wie auch bei Rohrströmungen zwischen einem laminaren und turbulenten Zustand unterscheidet, wird mit der FROUDE-Zahl die Auswirkung einer Randstörung beurteilt. Für einen stationären Zustand kann aus Energiebetrachtungen die Zustandsgleichung für Freispiegelströmungen abgeleitet werden

$$h^3 - h_e h^2 + \frac{q^2}{2g} = 0 \quad . \quad (4.3)$$

Aufgrund ihres impliziten funktionalen Zusammenhangs und nichtlinearen Charakters eignet sie sich nur begrenzt zur Diskussion des Einflusses von spez. Energie und spez. Durchfluss auf die Wassertiefe [Tru08]. Geeigneter und anschaulicher sind Teilbetrachtungen, in denen entweder die spez. Energie h_e oder die spez. Durchflussmenge q als konstant gesetzt werden, so dass die Wassertiefe nur noch von einer Zustandsgröße abhängt:

$$h_e = \frac{q^2}{2g} \frac{1}{h^2} + h \quad , \quad (4.4) \quad q = \sqrt{2g} \sqrt{h^2 h_e - h^3} \quad . \quad (4.5)$$

Für den Fall eines konstanten Durchflusses lässt sich aus Gleichung (4.3) die Zustandsgleichung (4.4) zur Beschreibung des Zusammenhangs von spez. Energie h_e und Wassertiefe h ableiten, mit der sich die in Abbildung 4.1a dargestellte Energieparabel ergibt. Aus ihr ist erkennbar, dass bei einem bestimmten Durchfluss für eine bestimmte Wassertiefe h_{gr} ein minimales Energieniveau $h_{e,min}$ vorliegt, während für alle anderen Energieniveaus jeweils zwei Wassertiefen möglich sind. Wird stattdessen die spez. Energie als konstant gesetzt, so lässt sich aus der Zustandsgleichung (4.3) die Beziehung (4.5) zwischen spez. Durchfluss q und Wassertiefe h herleiten, so dass sich die in Abbildung 4.1b abgebildete Abflussparabel ergibt. Auch in ihr ist die Wassertiefe mit $h = h_{gr}$ nur eindeutig am Extremum $q = q_{max}$ bestimmt, während alle anderen Abflüsse mit zwei zueinander konjugierten Wassertiefen abgeführt werden können. Sowohl das Energieminimum als auch das Abflussmaximum treten gleichzeitig im sog. Grenzzustand bei $Fr = 1$ mit

$$\min. h_e = \frac{3}{2} h_{gr} \quad \text{und} \quad \max. q = \sqrt{g h_{gr}^3} \quad (4.6)$$

auf. In ihm ist die Strömungsgeschwindigkeit v gleich der Ausbreitungsgeschwindigkeit c , so dass Störungen sich nicht mehr entgegen der Strömungsrichtung ausbreiten können. Fließzustände mit $Fr < 1$ werden als unterkritisch bzw. strömend bezeichnet. Bei ihnen breiten sich

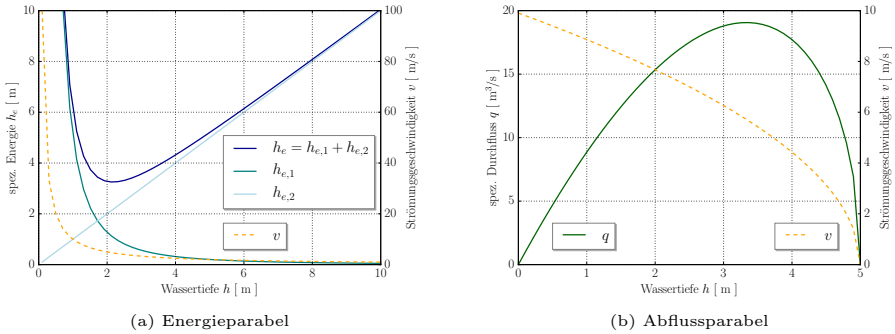


Abb. 4.1: Verlauf der Zustandsgrößen in Abhängigkeit des Fließzustandes

Störungen auch entgegen der Strömungsrichtung aus und es liegen gegenüber der Grenztiefe größere Wassertiefen, $h > h_{gr}$, mit geringeren Strömungsgeschwindigkeiten vor. Hingegen ist bei überkritischen, schießenden Fließzuständen mit $Fr > 1$ die Strömungsgeschwindigkeit größer als die Ausbreitungsgeschwindigkeit und die Wassertiefe geringer als im Grenzzustand, $h < h_{gr}$. Jeder vom Grenzzustand abweichende Energie- oder Durchflusszustand kann sowohl strömend als auch schießend mit den zueinander konjugierten Wassertiefen abgeleitet werden.

Der Übergang vom unter- in den überkritischen Zustand erfolgt dabei kontinuierlich, wohingegen der Umschlag vom über- in den unterkritischen Zustand stets räumlich begrenzt in Form eines Wechselsprunges stattfindet. Dabei bildet sich meist eine Wirbelwalze aus, in der ein nennenswerter Anteil der Strömungsenergie dissipiert wird und eine starke Vermischung von Luft und Wasser stattfindet. Der Grenzzustand ist insbesondere für die Auslegung von Kontroll- und Regelungsbauwerken von Bedeutung, da mit ihm ein maximaler Abfluss mit eindeutiger Wassertiefe eingestellt werden kann und sich Störungen nicht stromaufwärts ausbreiten können.

4.1.2 Überfallbauwerke

Zur Regulierung des Abflusses werden Kontrollbauwerke im Strömungsquerschnitt von Fließgewässern angeordnet. Sie dienen bei schwankenden Durchflussmengen dazu, den Wasserstand in einem definierten Bereich zu halten, so dass u.a. für die Schifffahrt ein ausreichender Tiefgang gewährleistet ist und für Landwirtschaft, Industrie und Laufwasserkraft stets ein definiertes und ausreichendes Wasserniveau zur Verfügung steht [Str06]. Die Regulierungsfunktion von Kontrollbauwerken wird über das gezielte Herbeiführen des kritischen Abflusszustandes im Kontrollquerschnitt erreicht, so dass für eine gegebene Differenz von Ober- und Unterwasserspiegellage Δh die Durchflussmenge Q festgelegt ist bzw. für eine bekannte Durchflussmenge Q sich die zugehörige Höhendifferenz der Wasserspiegellagen Δh einstellt. Überströmte Kontrollbauwerke wie Wehre und Schütze werden auch als Überfälle bezeichnet. Dabei kann sich der Begriff »Überfall« sowohl auf den Abflussvorgang als auch auf das Bauwerk selbst beziehen.

Ist das Abflussverhalten am Überfall vom Unterwasser unbeeinflusst, so liegt ein vollkommener Überfall vor; beeinflusst hingegen der Unterwasserstand infolge eines Rückstaus das Abflussverhalten, so handelt es sich um einen unvollkommenen Überfall.

Überströmte Wehre und Schütze

Das Abflussverhalten an einem überströmten Wehr mit scharfkantigem Profil wird mit der Abflussformel nach POLENI beschrieben

$$Q = \frac{2}{3} C_Q \sqrt{2g} b h^{3/2} . \quad (4.7)$$

Darin sind C_Q der dimensionslose Abfluss- oder auch Überfallbeiwert, b die Breite des Wehrkörpers und h die Überfallhöhe. Die Bestimmung der Überfallhöhe h erfolgt in einem Abstand von $3 - 4 h$ von der Wehrkrone entfernt und gibt den vertikalen Abstand zwischen Wehrkrone und Wasserspiegellage an. Der Überfallbeiwert C_Q ergibt sich bei der Ermittlung der Durchflussmenge durch Integration der im Kontrollquerschnitt tatsächlich vorliegenden Geschwindigkeitsverteilung [Tru08]. Dabei wird für ein Wehr mit abgerundeter Wehrkrone bei vollkommenem Überfall unter Bezug auf die Arbeiten von TORICELLI eine wurzelförmige Geschwindigkeitsverteilung angenommen

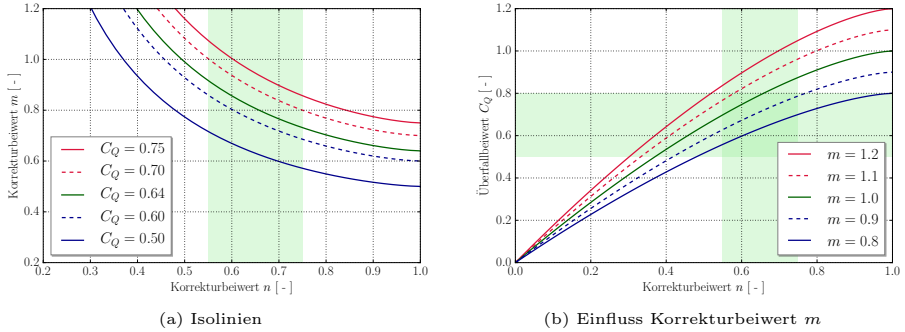
$$v(z) = \sqrt{2g(h-z)} \quad \text{für} \quad 0 \leq z \leq nh \text{ mit } n < 1 , \quad (4.8)$$

woraus sich für den Überfallbeiwert

$$C_Q = m \left(1 - \sqrt{(1-n)^3} \right) \quad (4.9)$$

als analytische Beziehung ergibt. Der Übergang der Integrationsrichtung ds entlang der Potentiallinie an der Wehrkrone auf die vertikale Höhenkoordinate dz wird über den Korrekturbeiwert m berücksichtigt. Der Korrekturbeiwert n berücksichtigt des Weiteren die Absenkung der Wasserspiegellage an der Wehrkrone gegenüber der ungestörten Anströmung und damit den Einfluss der Bauwerksgeometrie auf die Stromlinienkrümmung. In Abbildung 4.2a ist der Verlauf des Überfallbeiwertes C_Q für verschiedene Kombinationen von n und m dargestellt. Dabei liegt der Korrekturbeiwert n für die in der Praxis gewöhnlich auftretenden Stromlinienkrümmungen in der Größenordnung von $2/3$ [Zan13]. Aus Abbildung 4.2b ist zu erkennen, dass für den praktisch auftretenden Wertebereich von C_Q (grün hinterlegter Bereich) vorwiegend Korrekturfaktoren von $m \leq 1.0$ auftreten.

Die den Überfallbeiwert C_Q und die Stromliniengeometrie beeinflussenden Parameter sind im Wesentlichen die Randgeometrie und die Randbedingungen an der freien Oberfläche. Darüber hinaus können auch die Randrauhheit und die Anströmbedingungen sowie Fr-, Re- und We-Zahl und ggf. weitere dimensionslose Kennzahlen Einfluss auf die Stromliniengeometrie und die Topologie des Strömungsfeldes haben. Der Überfallbeiwert nimmt meist Werte zwischen 0.5 (breitkronige Wehre) und 0.8 (dachförmige Wehre) an; für den scharfkantigen, belüfteten Überfall ist $C_Q \approx 0.64$. Für den Sonderfall bodenparallelen Stromlinien und konstanter Wasserspiegellage, bei der der Wehrkörper somit keine Auswirkung auf das Strömungsfeld hätte, würde der (theoretische) Wert von $C_Q = 1.0$ erreicht.


Abb. 4.2: Verlaufskurven Überfallbeiwert C_Q

Für scharfkantige Überfallwehre gelten die von REHBOCK und BÖSS empirisch entwickelten Beziehungen

$$\begin{aligned}
 C_Q &= 0.41 + 0.053 \frac{h}{w} & \text{für } \frac{h}{w} < 6 & \quad (\text{Wehre}) \\
 C_Q &= 0.71 \sqrt{\left(1 + \frac{w}{h}\right)^3} & \text{für } \frac{w}{h} < 0.06 & \quad (\text{Schwellen}),
 \end{aligned} \tag{4.10}$$

deren Verlaufsfunktionen in Abbildung 4.3 graphisch aufgetragen und mittels einer Übergangsfunktion verbunden sind. Zu erkennen ist die bei scharfkantigen Wehren kontinuierlich sinkende Abflussleistung für Abweichungen von der maximalen Überströmungshöhe bei $\frac{h}{w} = 10$. Steigt der Unterwasserspiegel an, so erlangt auch dieser Einfluss auf die Abflussleistung und der Durchfluss wird eine Funktion von Ober- und Unterwasserspiegel, $Q = Q(h, h_{\text{UW}})$. Beim Übergang des vollkommenen Überfalls in einen unvollkommenen sinkt die Abflussleistung weiter, was im Wesentlichen durch die Tauchung des Überfallstrahls mit Wellenbildung hervorgerufen wird, die dem Abfluss einen Widerstand entgegensetzt.

Gegenüber scharfkantigen Wehren, die vorwiegend zur Durchflussmessung verwendet werden, besitzen die meisten festen und beweglichen Wehrtypen einen abgerundeten Wehrrücken (sog. rundkronige bzw. abgerundete Überfälle, s. Abbildung 4.4). Die Geometrie des Überfallrückens leitet sich hierbei vom Freistrahls des scharfkantigen Wehres ab, indem die Geometrie des Wehrrückens dem Verlauf der Unterseite des Freistrahls beim scharfkantigen Überfall folgt, an dem atmosphärischer Druck herrscht. Dadurch bleibt der Wehrrücken beim Bemessungsdurchfluss weitestgehend belastungsfrei. Lediglich an Krümmungswechseln und bei Abweichungen von der Freistrahlsgeometrie treten Wasserdrücke auf den Wehrkörper auf. Mit der Ausbildung des Wehrrückens in Anlehnung an die Freistrahlsgeometrie werden Strömungsablösungen und Strahlinstabilitäten wie sie beim scharfkantigen Wehr auftreten sowie Unterdrücke mit Kavitationsgefahr für den Bemessungsdurchfluss vermieden.

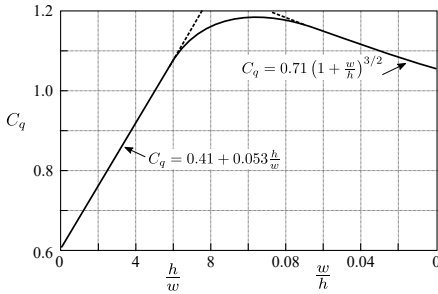


Abb. 4.3: Überfallbeiwert beim scharfkantigen Überfall (nach [Nau92])

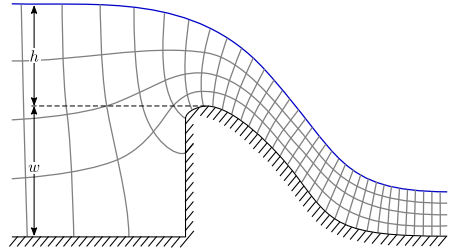


Abb. 4.4: Stromlinienverlauf beim rundkronigen Überfall (nach [Tru08])

Der Überfallbeiwert von Wehren mit Überfallrücken lässt sich aus demjenigen des scharfkantigen Wehres ableiten. Er entspricht jedoch weiterhin dem in Abbildung 4.3 dargestellten Verlauf. Bei Abweichungen von der Form des freifallenden Überfallstrahls reagiert die Strömung außer im Bereich geringer Strömungsgeschwindigkeiten sehr empfindlich auf bereits geringe Krümmungsänderungen und neigt dann zu Instabilitäten.

Wie der mittleren Kurve in Abbildung 4.5 zu entnehmen ist, ist im Bemessungsfall der Wehrrücken nahezu belastungsfrei. Lediglich im Einlaufbereich herrscht ein geringer Unterdruck vor. Bei Durchflussmengen oberhalb des Bemessungszustandes ist zu berücksichtigen, dass es zur Unterdruckbildung auf dem gesamten Wehrrücken kommt, die die Gefahr der Strömungsinstabilität durch Ablösung und Kavitation hervorrufen kann (Abbildung 4.5, untere Kurve). Demgegenüber treten bei Überströmungshöhen unterhalb des Bemessungsdurchflusses Überdrücke auf (Abbildung 4.5, obere Kurve). Der Verlauf des Abflussbeiwertes bei von der Bemessungssituation abweichenden Durchflussmengen ist in Abbildung 4.6 dargestellt. Deutlich ist zu erkennen, dass der Überfallbeiwert mit zunehmender Durchflussmenge, insbesondere oberhalb des Bemessungsdurchflusses, ansteigt. Nach [Nau92] sind dabei Leistungssteigerungen von bis zu 300 % möglich. Jedoch wird die Leistungssteigerung mit einer instabilen Strömung und der Gefahr zur Strömungsalösung und möglicher Kavitationsbildung erkauft.

Für feste Wehre haben sich die vom *American Corps of Engineers* an der *Waterways Experiment Station* entwickelten *WES*-Profile als äußerst leistungsstark und robust gegenüber Strömungsinstabilitäten erwiesen. Ihre Geometrie ist für Durchflüsse etwas unterhalb des Bemessungsdurchflusses optimiert, da diese in der Regel wesentlich häufiger auftreten als der Bemessungsdurchfluss selbst. Dadurch liegt im Bemessungsfall ein leichter Unterdruck vor, der aber noch keine Instabilität hervorruft, jedoch bereits leistungssteigernd wirkt. Die strömungsgünstigen *WES*-Profile erreichen Überfallbeiwerte von 0.65 bis 0.75 [Str06].

Im Hinblick auf das in Abschnitt 4.2.3 untersuchte Kreisbogenschütz mit höhenverstellbarem Überfallrücken nimmt bei beweglichen Wehrverschlüssen gegenüber festen Wehrkörpern die Anzahl an geometrischen Einflussparametern auf die Stromliniengeometrie und damit den

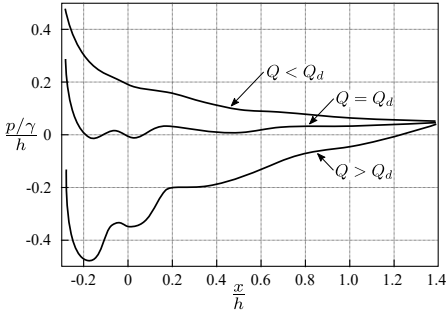


Abb. 4.5: Druckverteilung auf Schützzrücken
(nach [Nau92])

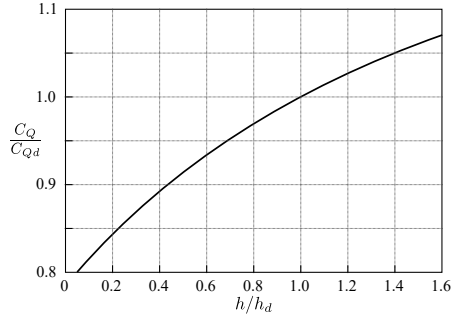


Abb. 4.6: Überfallbeiwert bei einer variablen
Überfallhöhe (nach [Jir09])

Überfallbeiwert zu. Da in der Literatur bis heute nur eingeschränkt anwendbare Angaben für die Verlaufsfunktionen von Überfallbeiwerten bei beweglichen Wehrkonstruktionen zu finden sind, ist es hierfür auch weiterhin notwendig Modellversuche durchzuführen [Nau92].

Wechselsprung

Nach Überströmen des Kontrollbauwerks liegt meist ein schießender Fließzustand vor, der beim Auftreffen auf das Unterwasser verzögert wird und wieder in einen strömenden Zustand übergeht. Gegenüber dem stetigen und annähernd reibungsfrei verlaufenden Wechsel von Strömen zu Schießen erfolgt der als Wechselsprung bezeichnete umgekehrte Übergang räumlich stark begrenzt und ist mit einer erheblichen Energiedissipation verbunden. Die Verzögerung beim Auftreffen auf das Unterwasser führt zu einem Druckanstieg und einer Aufweitung des Strömungsprofils unter Ausbildung eines Rückströmungsgebietes.

In Abhängigkeit der Froude-Zahl der Anströmung Fr_1 kann dabei der Wechselsprung, wie in Abbildung 4.7 dargestellt, unterschiedliche Ausprägungen erfahren. Diese reichen von einer reinen Wellenbildung mit Oberflächenwellen ($Fr_1 < 1.7$) bis hin zu einer ausgeprägten Deckwalze mit starkem Lufteintrag und Schaumbildung ($Fr_1 > 1.7$). In den ingenieurtechnisch kontrollierten Bereichen von Fließgewässern wird der Wechselsprung in der Regel unmittelbar hinter dem Kontrollbauwerk im sog. Tossbecken bewusst herbeigeführt und konstruktiv gesteuert, um in dem dem Kontrollbauwerk folgenden Gerinneabschnitt die Sohlerosion zu minimieren.

Unter Anwendung des Impulssatzes ist es möglich die Wassertiefe der unterkritischen Abströmung h_2 am Ende des Wechselsprungs mit Kenntnis von Wassertiefe h_1 und Froude-Zahl Fr_1 der überkritischen Anströmung zu ermitteln

$$h_2 = \frac{h_1}{2} \left[\sqrt{1 + 8 Fr_1^2} - 1 \right] \quad \text{mit} \quad Fr_1 = \frac{q}{\sqrt{g h_1^3}} > 1 \quad . \quad (4.11)$$

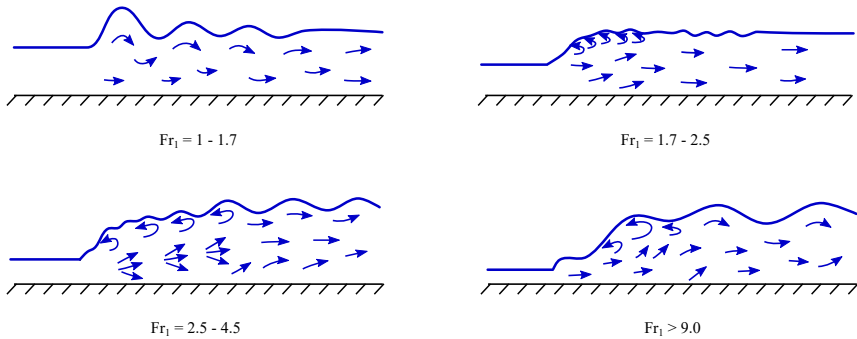


Abb. 4.7: Ausprägungen des Wechselsprungs (nach [Nau92])

Damit kann die im Bereich des Wechselsprungs auftretende Energiedissipation als Verlusthöhe h_V quantifiziert werden

$$h_V = \frac{(h_2 - h_1)^3}{4h_1 h_2} . \quad (4.12)$$

Wie bei der Ausbildung des Wechselsprungs (vgl. Abbildung 4.7) hängt auch die Verlusthöhe von der FROUDE-Zahl der Anströmung Fr_1 ab. Für $Fr_1 \leq 1.7$ (Wechselsprung mit Oberflächenwellen) liegen mit einer Sprungstärke von $h_2/h_1 < 2.0$ nur geringe Differenzen der Wasserspiegellagen von An- und Abströmung vor, wodurch fast keine Energiedissipation stattfindet. Hingegen wächst für $Fr_1 > 1.7$ (Wechselsprung mit Deckwalze) mit $h_2/h_1 > 2.0$ die auftretende Verlusthöhe schnell an. Die Veränderung der Zustandsgrößen beim Wechselsprung ist in Abbildung 4.8 sowohl für die Verlust- als auch die Sprunghöhe dargestellt. Es wird deutlich, dass mit zunehmender Sprunghöhe h_2/h_1 die Energiedissipation zunimmt und insbesondere ab $h_2/h_1 > 2.0$ deutlich ansteigt. Die Sprunghöhe selbst wächst hingegen exponentiell mit zunehmender FROUDE-Zahl Fr_1 der Anströmung.

Die Länge des Wechselsprungs lässt sich wie die eintretende Ausprägung des Wechselsprungs aus rein theoretischen Betrachtungen nicht exakt beschreiben, jedoch haben experimentelle Untersuchungen gezeigt, dass die Wechselsprunglänge ca. das 6-fache der abströmenden Wassertiefe ist [Nau92].

Wehrschwingungen

Charakteristisch für überströmte Wehre und Schütze ist bei abgelöstem, hinterlüftetem Überfallstrahl die Möglichkeit des Auftretens von Wehrschwingungen, die sich akustisch als Wehrbrummen äußern und in ihrer dynamischen Belastung mit der Gefahr zur Resonanz eine erhebliche Beanspruchung des Wehrkörpers darstellen [Wic71]. Erstmals wurden Wehrschwingungen in Deutschland in den 30er Jahren des 20. Jahrhunderts am Allerwehr in Dörverden beobachtet, wo sie im Zuge der durch den Stahlbau größer gewordenen Spannweiten auftraten und eine nicht mehr zu vernachlässigende Beanspruchung erreichten. Dies führte ab 1930

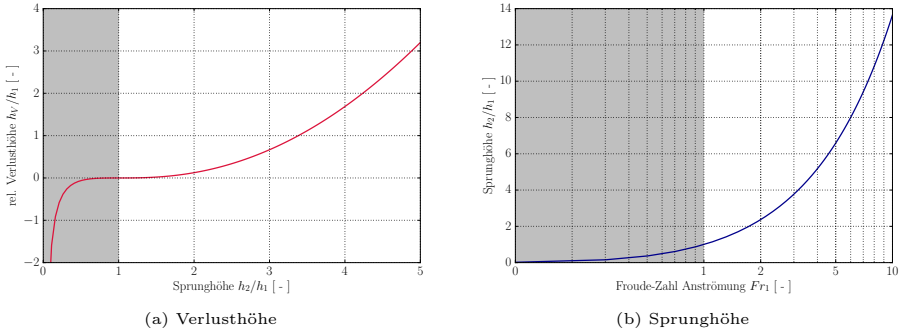


Abb. 4.8: Zustandsgrößenveränderung beim Wechselsprung

bis zum Ende des 2. Weltkrieges beginnend mit der grundlegenden Arbeit von [Fuh34] zu einer ersten wissenschaftlichen Untersuchung der auftretenden physikalischen Phänomene bei Wehrschwingungen. Aufbauend und ergänzend zu der Arbeit von FUHRMANN schließen sich die Untersuchungen von O. MÜLLER, SEIFERT, PETERS und PETRIKAT an, deren damaliger Vorschungsstand von [Leo54] zusammengefasst und systematisiert wird. Die im Rahmen der Möglichkeiten vor und während des 2. Weltkriegs durchgeführten Untersuchungen wurden nach dem Krieg sowohl von KOLKMAN in den Niederlanden als auch insbesondere in Deutschland von NAUDASCHER weitergeführt. Die Erkenntnisse der mehr als 50jährigen Forschungsarbeit sind in [Nau91] als Konstruktionsempfehlungen zusammengefasst. Besteht die Gefahr von Wehrschwingungen, ergibt sich als wesentliche Konstruktionsvorschrift das Aufbringen von Strahlaufreißern zur Belüftung des eingeschlossenen Luftpólsters, so dass zwischen Wehr und Überfallstrahl keine Rückkopplung über das Luftpólster mehr möglich ist. Doch trotz der umfangreichen Forschungsarbeiten und Konstruktionsempfehlungen treten weiterhin strömungsinduzierte Schwingungen im Stahlwasserbau auf und stellen eine zu beachtende Beanspruchung dar [Geb15]. Ihre Berücksichtigung ist dabei mit nicht zu vernachlässigenden Schwierigkeiten verbunden, da die mathematische Beschreibung noch nicht abschließend erarbeitet ist [Sch02], so dass neben numerischen Simulationen [Sch10] auch weiterhin experimentelle Untersuchungen notwendig sind [Göb17].

Bei der Wehrschwingung lassen sich drei miteinander wechselwirkende Systeme abgrenzen: Zum einen das Wehr mit einem Teil des Luftpólsters, daneben der Überfallstrahl ebenfalls anteilig mit dem Luftpólster sowie das Luftpólster selbst (s. Abbildung 4.9). Das Luftpólster überträgt die Energie zur Aufrechterhaltung der Schwingung vom Strahl an das Wehr in Form von Druckschwankungen. Liegen diese Schwankungen in der Nähe der Eigenfrequenz des Luftpólsters, so tritt Resonanz auf und es kommt zum Wehrbrummen.

Bei der Wehrschwingung handelt es sich um eine selbsterregte Schwingung, auch als *instability induced excitation* im Sinne von [Nau94] bezeichnet, die an der Eintauchstelle des Strahles durch wiederaufsteigende Luftblasen initialisiert wird, welche den Strahl auslenken und ihn beginnen lassen, um seine stationären Lage zu pendeln. Die Pendelbewegungen führen zu

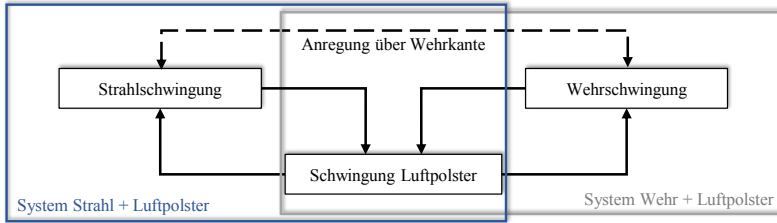


Abb. 4.9: Teilsysteme der Wehrschwingung mit Kopplungsmechanismen

Druckschwankungen im Luftpolster, die sich auf den Wehrkörper übertragen und ihn ebenfalls zu einer Schwingung anregen, sofern die Druckschwankungen im Bereich der Eigenfrequenz des Wehrkörpers liegen. Durch die Schwingungen des Wehrkörpers wird den Wasserteilchen an der Abreißkante jeweils eine variierende horizontale Geschwindigkeitskomponente aufgeprägt, so dass sich die Wasserteilchen auf unterschiedlichen Fallparabeln in Richtung Unterwasser bewegen. Gegenüber dem Wehrkörper schwingen die Masseteilchen des Strahles selbst nicht, ergeben jedoch aufgrund ihrer unterschiedlichen Fallparabeln eine gewellte Strahlform (s. Abbildung 4.10a), die optisch einer Strahlschwingung entspricht. Die Strahlwellungen werden beim Herabfallen durch die Erdbeschleunigung vergrößert, wobei die unterste Halbwelle unmittelbar vor dem Eintauchen in das Unterwasser maßgebend die Druckschwankungen im Luftpolster hervorruft, da sich die Volumenänderungen aller anderen Halbwellen gegenseitig ausgleichen. Zur Aufrechterhaltung der rückgekoppelten Schwingung kommt es durch den Energieeintrag über die Vergrößerung der Halbwellen beim Herabfallen infolge der Erdbeschleunigung. Insgesamt stellt der Überfallstrahl bei der Wehrschwingung sowohl den Regler als auch den Verstärker für die Schwingung des Wehrkörpers dar, während das Luftpolster die Rückkopplung zwischen beiden Teilsystemen ermöglicht.

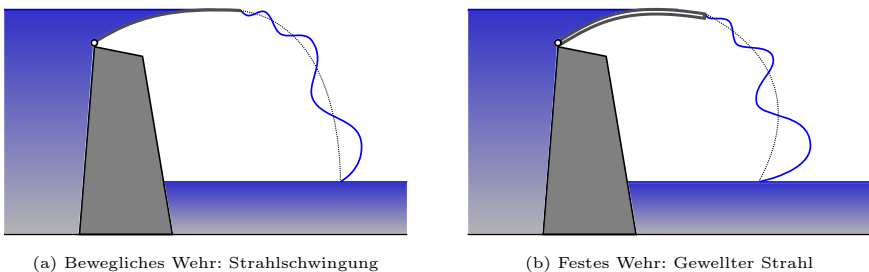


Abb. 4.10: Strahlformen bei beweglichem und festem Wehrkörper (nach [Leo54])

Auch bei einem festen, nicht schwingungsfähigen Wehrkörper können Strahlwellungen auftreten, jedoch gegenüber elastischen Wehrkörpern nur bei sehr dünnen Überfallstrahlen. Hier ist der Überfallstrahl sowohl Schwinger als auch Regler und Verstärker der Bewegung. Die

an der Abreißkante stattfindende Beeinflussung der horizontalen Geschwindigkeitskomponente der einzelnen Wasserteilchen findet dabei durch lokale Druckspitzen statt, die mit den Druckschwankungen im Luftpolster einhergehen. Gegenüber Wehrschwingungen tritt somit auch eine Strahlwellung auf, jedoch mit deutlich anderer Gestalt (s. Abbildung 4.10b). Der Strahl pendelt hierbei mit abnehmender Strahldicke um seine stationäre Lage, wobei der Pendelbewegung die Strahlwellungen überlagert sind. Dadurch ergibt sich insbesondere im unteren Bereich und für die unterste Halbwelle eine stark gewellte Strahlform.

Sowohl für die Wehrschwingung bei elastischen Wehrkörpern als auch für die Strahlwellung bei festem Wehrkörper erfolgt die Unterbindung der selbsterregten Schwingung durch Aufreißen des Überfallstrahles, so dass sich Druckschwankungen im Luftpolster sofort mit der Umgebungsluft ausgleichen können.

4.2 Experimentelle Untersuchungen

4.2.1 Notwendigkeit

Komplexes Strömungsverhalten. Bereits bei sehr einfachen Strömungen treten komplexe Phänomene wie Ablösungen und Wirbelbildungen auf, bei denen stets eine große Bandbreite an räumlichen und zeitlichen Skalen vorliegt. Die NAVIER-STOKES-Gleichungen (2.64) sind prinzipiell in der Lage, sämtliche in der Natur auftretenden makroskopischen Strömungsphänomene abzubilden. Jedoch haben sie eine nichtlineare Gestalt, womit in Abhängigkeit des gewählten Startwertes beim iterativen Lösen der errechnete mathematische Zustand unter Umständen nicht einem physikalisch zulässigen Zustand entspricht. Auch zeigen sie in Übereinstimmung mit der in der Realität bei Strömungen vorliegenden Turbulenz ein mathematisch chaotisches Lösungsverhalten, da bereits geringfügige Änderungen in den Rand- und Anfangsbedingungen zu unterschiedlichen Endzuständen, insbesondere im kleinskaligen Bereich führen. Die Empfindlichkeit auf die Wahl von Rand- und Anfangsbedingungen ist auch abhängig von der Kombination der beiden Bedingungen, so dass nicht für alle Rand- und Anfangswertkombinationen sichergestellt werden kann, dass die Strömungsbeschreibung im Sinne von HADAMARD korrekt gestellt ist.

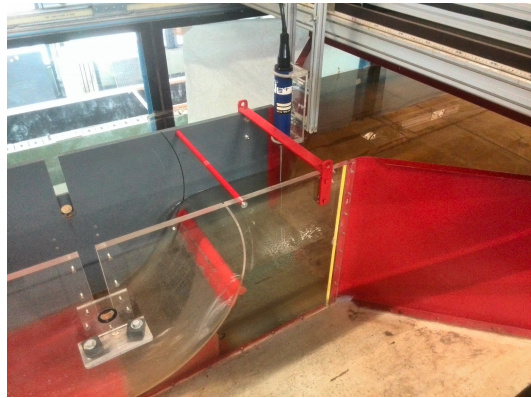
Diskretisierungsfehler. Außer für Sonderfälle mit teils stark vereinfachenden Annahmen ist gegenwärtig noch keine allgemeine Lösung der NAVIER-STOKES-Gleichungen bekannt (vgl. Abschnitt 1.1), so dass zu ihrer Lösung auf numerische Verfahren zurückgegriffen werden muss. Infolge der im Rahmen der Diskretisierung stattfindenden Überführung von einer kontinuierlichen in eine diskrete Beschreibungsweise ergeben sich weitere Fehlerquellen. In Abhängigkeit der Wahl des Diskretisierungsverfahrens werden nicht alle Eigenschaften der kontinuierlichen Formulierung vollständig erhalten, wie z.B. das lokale Kräftegleichgewicht und die Masseerhaltung bei der Finite-Elemente-Methode. Darüber hinaus führt die Wahl einer diskreten räumlichen und zeitlichen Schrittweite dazu, dass nicht mehr alle Skalen aufgelöst werden und damit einzelne Effekte in der numerischen Berechnung nicht berücksichtigt sind, die ggf. einen signifikanten Einfluss auf das Ergebnis gehabt hätten. Zur Berücksichtigung von Einflüssen unterhalb der aufgelösten Skalen werden daher weitere Modellannahmen mit in die Beschreibung einbezogen, die den Einfluss der nicht aufgelösten Skalen auf die aufgelösten berücksichtigen, wie dies z.B. bei der Turbulenzmodellierung erfolgt. Die zusätzlich auftretenden Parameter werden empirisch oder heuristisch bestimmt. Gegenwärtig ist eine vollständige Abbildung sämtlicher Skalen und Effekte ohne zusätzliche Modellannahmen im praktischen Vorgehen als nicht umsetzbar anzusehen, da die dafür notwendige Dichte an Berechnungspunkten die Rechen- und Speicherkapazitäten sprengen würde [Fer08]. Neben der begrenzten Modellierungstiefe bei numerischen Berechnungen tritt als weitere Schwierigkeit bei der Diskretisierung die Gefahr einer schlechten Konditionierung hinzu. Entgegen der in der Natur vorliegenden Verteilung und Kombination können bei numerischen Berechnungen für Rand- und Anfangsbedingungen solche gewählt werden, dass trotz mathematisch belegter korrekter Formulierung nach HADAMARD die Lösung sich äußerst empfindlich zeigt. Ursache ist eine schlechte Konditionierung der numerischen Umsetzung, die sich in einer großen Konditionszahl ausdrückt.

Plausibilitätsprüfung. Infolge dem bereits bei einfachen Geometrien in der Regel komplexen Strömungsverhältnissen und den stets unvermeidlichen Modell- und Diskretisierungsfehlern ist es bei numerischen Strömungssimulationen unabdingbar die berechneten Ergebnisse kritisch auf ihre physikalische Plausibilität hin zu überprüfen. Dies kann nur anhand von experimentellen Messergebnissen erfolgen, die entweder *in situ* oder im Labor gewonnen werden. Weisen die numerischen und experimentellen Ergebnisse neben einer qualitativen auch noch eine quantitative Übereinstimmung auf, so konnte die numerische Methodik, also die Umsetzung der theoretischen Formulierung mittels eines Diskretisierungsverfahren in ein Computerprogramm, validiert werden.

4.2.2 Experimentalmodell



(a) Ansicht von UW



(b) Nahbereich mit ADV-Sonde

Abb. 4.11: Schütz-Experimentalmodell in der großen Geschieberinne

Versuchsaufbau. Um experimentelle Vergleichsdaten zur Plausibilitätsprüfung für die in Abschnitt 4.3 vorgestellten numerischen Ergebnisse zur Verfügung zu stellen, wurden in der großen Geschieberinne des Wasserbaulabors des LEICHTWEISS-Instituts der TU Braunschweig (Abbildung 4.11a) umfangreiche Untersuchungen zur Überstömung an einem Kreisbogen-Überfallschütz im Modellstab 1:10 durchgeführt. Die große Geschieberinne des Wasserbaulabors hat eine Länge von 36.40 m und eine Breite von 2.0 m. Ihre genauen technischen Daten sind ausführlich in [Sei15] dargestellt. Sie ermöglicht eine regelbare und beruhigte Zuströmung mit einem durch das Schütz selbst steuerbaren Oberwasserstand und einem durch eine Absperrklappe variablen Unterwasserstand. Das Schützmodell selbst ist nach ca. 14 m Vorlauflänge mittig in die Rinne eingesetzt.

Schützmodell. Das Kreisbogenschütz (Abbildung 4.11b) ist ursprünglicher Bestandteil des Wasserrad-Experimentalmodells, das ausführlich in Abschnitt 5.2 beschrieben ist. Es handelt sich um ein geometrisch ähnliches Modell im Maßstab 1:10, dessen Abschnittsbreite von

46 cm sich aus der Berücksichtigung aller wesentlichen Konstruktionselemente des Wasserrades ergibt. Infolge der gegenüber der Geschieberinne reduzierten Breite befindet sich das Schützmodell in einem 160 cm langen und 46.6 cm breiten Kanal, der in die 2 m breite Geschieberinne eingesetzt ist. Die Verjüngung und Verbreiterung vor und nach dem Kanalbereich erfolgt mit im Winkel von 45° angestellten Leitblechen, die zu einer Düsen- bzw. Diffusorwirkung führen. Das Schütz selbst besteht aus einem 2 mm dicken, verzinkten Stahlblech mit einem Biegeradius von 402 mm und einem maximalen Öffnungswinkel von 50° . An das Schütz schließt der Wasserrad-Kropf mit einem Öffnungswinkel von 55° an. Der unmittelbare Kanalbereich um das Schütz sowie seine Verjüngung und Verbreiterung ist in Abbildung 4.14 ersichtlich.

Übertragungsmaßstäbe. Neben der Möglichkeit basierend auf dem Schützmodell experimentelle Ergebnisse zur Plausibilitätsüberprüfung numerischer Berechnungen zur Verfügung zu haben, bestand der ursprüngliche Grund im Bau des Modells darin, die dort stattfindenden Strömungsvorgänge bereits vor Realisierung eines Prototyps im Großmaßstab untersuchen zu können. Das Schützmodell selbst ist dabei Bestandteil eines in Abschnitt 5.2 ausführlich beschriebenen Wasserradmodells. Die Betrachtung der Strömungsvorgänge am vom Wasserrad separierten Schütz ermöglicht im späteren Verlauf die Charakterisierung der Auswirkung des Wasserradeinflusses auf die Abflusscharakteristik. Neben ihrer Verwendung zum Plausibilitätsabgleich bei numerischen Berechnungen können die am Modell des Kreisbogenschützes ermittelten physikalischen Größen unter Verwendung von Ähnlichkeitsmechanischen Übertragungsmaßstäben auf eine zu realisierende Großausführung übertragen werden.

Voraussetzung für die Übertragung mechanischer Größen vom Modell auf eine Großausführung ist die dynamische Ähnlichkeit, die neben der eindeutigen Existenz von Übertragungsmaßstäben für Länge, Zeit und Kraft bzw. Masse, identischen Anfangs- und Randbedingungen auch die Gleichheit der die Strömungssituation beschreibenden dimensionslosen Kennzahlen benötigt. Die dynamische Ähnlichkeit fordert die nach Betrag und Richtung korrekte Übertragung der an einem Partikel angreifenden Kräfte. In der Strömungsmechanik sind dies als Volumenkraft die Schwerkraft und als Oberflächenkräfte die Reibungs- und Druckkraft, welche im dynamischen Gleichgewicht mit der resultierenden Trägheitskraft stehen und so die Bewegung hervorrufen. Bezugnehmend auf die Interpretation der REYNOLDS-Zahl Re als Verhältnis von Trägheits- zu Reibungskraft und der FROUDE-Zahl Fr als Verhältnis von Trägheits- zu Schwerkraft führt dies bei strömungsmechanischen Vorgängen zur Forderung nach Identität beider Kennzahlen für Modell und Großausführung, um gleiche Kraftverhältnisse an beiden Ausführungen vorliegen zu haben. Die Übertragung der Druckkräfte ergibt sich dabei unmittelbar aus der Forderung nach Identität von REYNOLDS- und FROUDE-Zahl, da der Druckbeiwert selbst eine Funktion dieser beiden Kennzahlen ist.

Sollen sowohl Reibungs- als auch Schwerkraften denselben Maßstabsfaktor bei beschleunigten Bewegungen teilen, so ist keiner der Grundmaßstäbe für Länge, Zeit und Kraft bzw. Masse mehr frei wählbar. Alle Maßstabsfaktoren hängen vom Verhältniss der Materialparameter zwischen Modell und Großausführung ab. Da eine vollständige mechanische Ähnlichkeit jedoch experimentell in der Regel nur äußerst schwierig zu realisieren ist, wird sich meist auf die Übertragung der maßgebenden Kraftwirkung konzentriert. Dies ist bei hydrodynamischen Strömungen mit Freispiegel die Schwerkraft, so dass die Forderung nach Identität der REYNOLDS-Zahl zwischen Modell und Großausführung aufgegeben und sich stattdessen auf

die Identität der FROUDE-Zahl beschränkt wird, womit nur noch partielle anstatt einer vollständigen Ähnlichkeit gegeben ist. Unter der Annahme einer nicht freien Materialwahl beim Modell stellt der Längenmaßstab λ_l den einzig unabhängigen Übertragungsmaßstab dar. Für das den nachfolgenden Untersuchungen zugrundeliegende Experimentalmodell gilt $\lambda_l = 10$, aus dem sich sowohl die Grundmaßstäbe von Zeit, Kraft und Masse

$$\lambda_t = \sqrt{\lambda_l}, \quad \text{und} \quad \lambda_f = \lambda_m = \frac{\rho}{\bar{\rho}} \lambda_l^3 \quad (4.13)$$

als auch die mit den Grundmaßstäben über die kinematischen Grundgleichungen verknüpften Übertragungsmaßstäbe für Geschwindigkeit und Beschleunigung

$$\lambda_v = \sqrt{\lambda_l} \quad \text{und} \quad \lambda_a = 1 \quad (4.14)$$

sowie die Übertragungsmaßstäbe für die strömungsmechanisch relevanten Größen des Durchflusses und des Druckes

$$\lambda_Q = \sqrt{\lambda_l^5} \quad \text{und} \quad \lambda_p = \frac{\rho}{\bar{\rho}} \lambda_l \quad (4.15)$$

ableiten. Dabei stellen ρ und $\bar{\rho}$ die Dichte der Großausführung bzw. im Modell dar. Für den Fall der FROUDESchen Ähnlichkeit sind damit bei nicht freier Materialwahl durch Setzen des Längen-Übertragungsmaßstabes λ_l alle anderen Übertragungsmaßstäbe festgelegt.

Für die Übertragung der REYNOLDS-Zahl bei FROUDE-Ähnlichkeit folgt somit

$$\text{Re} = \lambda_{\text{Re}} \bar{\text{Re}} \quad \text{mit} \quad \lambda_{\text{Re}} = \frac{\sqrt{\lambda_l^3}}{\lambda_\nu}. \quad (4.16)$$

Wird wie häufig bei hydrodynamischen Modelluntersuchungen üblich dasselbe Material bei Großausführung und Modell verwendet, so ist der Übertragungsmaßstab der dynamischen Viskositäten $\lambda_\nu = 1$ und es ergibt sich

$$\text{Re} = \sqrt{\lambda_l^3} \bar{\text{Re}}. \quad (4.17)$$

Dabei gilt in der Regel, dass $\lambda_{\text{Re}} > 1$ ist, so dass $\bar{\text{Re}} < \text{Re}$, womit am Modell eine geringere REYNOLDS-Zahl vorliegt als an der Großausführung. Daher ist beim Modellmaßstab stets darauf zu achten, dass die dort vorliegende REYNOLDS-Zahl $\bar{\text{Re}}$ größer ist als die für das Strömungsgeschehen kritische REYNOLDS-Zahl $\text{Re}_{\text{krit.}}$, da anderenfalls Maßstabs- oder Skaleneffekte als Fehlerquelle in der Modelluntersuchung auftreten. Für das Schütz-Modell sind die Übertragungsmaßstäbe in Tabelle 4.1 zusammengefasst und ausgewertet.

Neben der Schwierigkeit bei der Gewährleistung mechanischer Ähnlichkeit alle maßgebenden Kräfte und die ihnen zugeordneten dimensionslosen Kennzahlen zwischen Modell und Großausführung in Übereinstimmung zu halten, ist auch die korrekte Übertragung von Anfangs- und Randbedingungen von der Natur auf das Modell mit Unsicherheiten behaftet. Sowohl das experimentelle Modell als auch ein Computermodeil sind von der eigentlichen Umgebung der Großausführung getrennt und stellen nur einen Ausschnitt der Realität des tatsächlichen physikalischen Geschehens an der Großausführung dar, an dem der Einfluss der Umgebung durch die Anfangs- und Randbedingungen aufgeprägt werden muss. Jedoch ist deren exakte Kenntnis nicht immer zweifelsfrei gegeben, ermittelbar oder wiederzugeben, so dass auch hierdurch Schwierigkeiten in der Übertragung der Ergebnisse zwischen Modell und Großausführung auftreten können.

Physikalische Größe	Übertragungsmaßstab	Froude-Ähnlichkeit	Maßstabsfaktor
Länge	λ_l	λ_l	10
Zeit	λ_t	$\sqrt{\lambda_l}$	3.16
Kraft	λ_f	$\rho/\bar{\rho} \lambda_l^3$	1000
Masse	λ_m	$\rho/\bar{\rho} \lambda_l^3$	1000
Geschwindigkeit	λ_v	$\sqrt{\lambda_l}$	3.16
Beschleunigung	λ_a	1	1
Durchfluss	λ_Q	$\sqrt{\lambda_l^5}$	316
Druck	λ_p	$\rho/\bar{\rho} \lambda_l$	10
Reynolds-Zahl	λ_{Re}	$\sqrt{\lambda_l^3}$	31.6

Tabelle 4.1: Übertragungsmaßstäbe Schütz-Experimentalmodell SWR-8

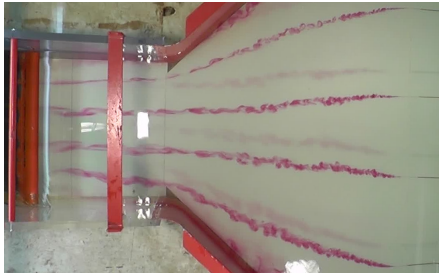
4.2.3 Versuchsergebnisse

Zielsetzung und Vorgehen

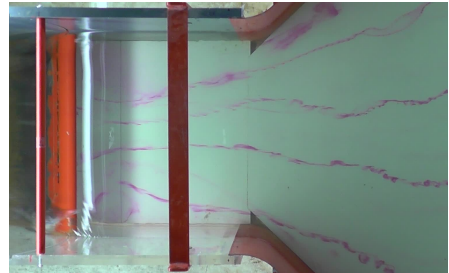
Für die im Rahmen dieser Arbeit entwickelte und programmtechnisch umgesetzte numerische Methode ist es infolge der nicht vorhandenen Verfügbarkeit von Verifikationslösungen notwendig, experimentelle Untersuchungen realer Strömungszustände durchzuführen, um die physikalische Plausibilität der Berechnungsergebnisse abzusichern bzw. kritisch hinterfragen zu können. Ausgangspunkt der Untersuchungen ist der von der Wasserradkonstruktion im Modellmaßstab (vgl. Abschnitt 5.2) entlehnte Konstruktionsdurchfluss von 21.81/s mit zu der bei einer Wassertiefe von 37 cm zugehörigen Schützstellung von 30 cm (obere Schützkante, Gerinneboden definiert Nullniveau). Zur Beobachtung der Einflüsse auf das Strömungsverhalten werden sowohl die Durchflussmenge als auch die Schützstellung verändert. Dabei erfolgt neben der Betrachtung des Konstruktionsdurchflusses noch die Untersuchung der Durchflussmengen von 16.01/s, 10.81/s und 5.81/s, die ebenfalls charakteristische Durchflussmengen des in Abschnitt 5.2 näher beschriebenen Wasserrad-Experimentalmodells sind. Die Schützstellung variiert angepasst auf die Durchflussmenge zwischen einer vollständig eingefahrenen und einer vollständig ausgefahrenen Stellung (min. OK bei 16.0 cm, max. OK bei 60.0 cm). Da die experimentellen Untersuchungen nicht zentraler Bestandteil dieser Arbeit sind, sondern lediglich zur Plausibilitätsprüfung der Berechnungsergebnisse dienen, beschränkt sich die Darstellung der experimentellen Untersuchungen auf den Konstruktionsdurchfluss mit 21.81/s bei einer Schützhöhe von 30 cm. Eine erste Analyse erfolgt dabei anhand der Visualisierung mittels Farbfäden. Im Hinblick auf die Zustandsvariablen der durchgeführten numerischen Berechnungen erfolgt des Weiteren sowohl punktweise die Aufnahme des Geschwindigkeitsfeldes als auch der Freispiegellage. Ziel ist es, eine möglichst umfassende Kenntnis des Strömungsfeldes in der direkten Umgebung des Überfallschützes im Hinblick auf das Geschwindigkeitsfeld sowie der Lage der Wasseroberfläche zu erlangen.

Farbfadenversuche

Mit Hilfe des über eine Düsenharfe eingebrachten Kaliumpermanganats kann das Strömungsverhalten im Verjüngungsbereich des Kanals sowie im Überfallbereich des Schützes anschaulich visualisiert werden. Schwierig bei dieser Form der Visualisierung ist die Wahl einer an die tatsächliche Strömungssituation angepassten Austrittsgeschwindigkeit der Visualisierungsflüssigkeit sowie ihrer Farbkonzentration. In der Draufsicht auf den Zulaufbereich des Schützes



(a) Verjüngung



(b) Wirbelbildung

Abb. 4.12: Schützüberströmung mit Farbfäden (Draufsicht)

(Abbildung 4.12a) lässt sich gut die Zusammendrängung der Farbfäden infolge der Verjüngung erkennen. Dabei bleiben die Farbfäden in der Mittelebene von den Auswirkungen der Strömungsumlenkung weitestgehend unbeeinflusst. In Abbildung 4.12b wird bei veränderter vertikaler Lage der Farbfäden zusätzlich noch ein dreidimensionaler Wirbel sichtbar, der sich in den unteren beiden Eckbereich unmittelbar vor dem Schütz ausbildet, sich über die gesamte Wassertiefe erstreckt und Wasserpartikel von der Sohle bis hinauf über das Schütz transportiert. Dieser Wirbel ist letztendlich ein maßgeblicher Faktor für das Einsetzen der Hinterlüftung des Überfallstrahles und wird am Ende dieses Abschnittes noch ausführlicher diskutiert.

Neben dem Strömungsverhalten über die Breite des Gerinnes stellt Abbildung 4.13 die Farbfadenverläufe in der Mittelebene über die Tiefe dar. Es zeigt sich, dass die oberen 2/3 der Stromlinien infolge der Schützgeometrie zur Oberfläche hin abgelenkt und damit über den Schützkopf abgeführt werden können (Abbildung 4.13a). Auch der Großteil des unteren Drittels der Stromlinien wird über den Schützkopf geführt (Abbildung 4.13b), jedoch erst nachdem die zugehörigen Stromlinien staupunktähnlich gegen die Unterseite des Schützes laufen. Hier nicht mittels Farbfäden wiedergegeben ist die zwischen Boden und Unterseite sich in der Mittelebene ausbildende vertikale, ebene Wirbelstruktur, die die unteren Stromlinien separiert in solche, deren Volumenstrom über den Schützkopf abgeführt wird und jene, die zwischen Schützunterseite und Bodenplatte entgegen der eigentlichen Strömungsrichtung ihre Richtung ändern.

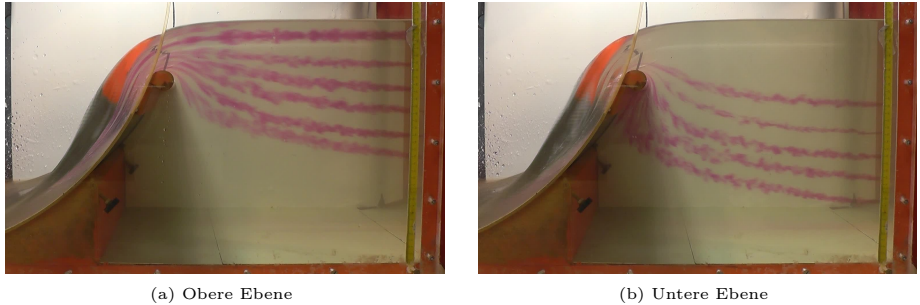


Abb. 4.13: Schützüberströmung mit Farbfäden in der Mittelebene (Ansicht)

Geschwindigkeitsmessungen

Zusätzlich zu den Farbfadenversuchen wurden Messungen des Geschwindigkeitsfeldes durchgeführt. Die Geschwindigkeitsfeldmessungen erfolgten sowohl mittels *Acoustic Doppler Velocimeter* (ADV) [SV14] als auch unter Verwendung einer Mikroflügelschraube. Beim ADV geschieht die Messung der Strömungsgeschwindigkeit durch Aussendung eines Schallsignals, das von den Wasserpartikeln reflektiert wird, die das Kontrollvolumen unterhalb des Messkopfes passieren. Die Ermittlung der Geschwindigkeit der Wasserpartikel erfolgt anhand des reflektierten Schallsignals unter Ausnutzung des DOPPLER-Effektes. Aufgrund der messtechnischen Anordnung, die bedingt, dass der Messkopf stets eingetaucht sein muss, kann mit Hilfe des ADV nur bis maximal 5 cm unterhalb der Wasseroberfläche gemessen werden. Auch kommt es in Abhängigkeit der Bodenverhältnisse in einer bestimmten Tiefe meist zu Reflektionen des Schallsignals, so dass für diese Messtiefe keine Geschwindigkeitswerte durchgehend verlässlich ermittelbar sind. Daher wurden die ADV-Geschwindigkeitsfeldmessungen an ausgewählten Schnitten durch Mikroflügel-Messungen ergänzt. Beim Mikroflügel können zwar für alle Positionen, einschließlich bis fast auf die Höhe der Wasseroberfläche, Messungen durchgeführt werden, jedoch wird stets nur die Komponente des Geschwindigkeitsvektors erfasst, in dessen Richtung der Mikroflügel ausgerichtet ist. Eine vollständige Erfassung aller drei Richtungsanteile ist nicht möglich, so dass sich Geschwindigkeitsmessungen mittels Mikroflügel nur für Strömungen mit einer klar definierten Hauptströmungsrichtung eignen, in die dann auch der Mikroflügel auszurichten ist. Demgegenüber bieten ADV-Messungen auch die Möglichkeit das Geschwindigkeitsfeld in komplexen Strömungen zu untersuchen, in denen keine ausgeprägte Hauptströmungsrichtung ausgemacht werden kann, da sie die drei Komponenten des Geschwindigkeitsvektors separat erfassen.

Zur Aufnahme des dreidimensionalen Geschwindigkeitsfeldes des Versuchsmodells wurde eine Vielzahl an Messpunkten festgelegt (Abbildung 4.14). In Hauptströmungsrichtung wurden drei parallele Längsachsen $y_{01} - y_{03}$ festgelegt, deren mittlere Achse y_{02} die Mittelebene der Strömung bildet, während die beiden parallelen Ebenen jeweils 13.3 cm davon entfernt sind. Damit beträgt der Abstand zwischen den beiden äußeren Längsachsen 26.6 cm wodurch noch

jeweils 10.0 cm Abstand zu den seitlichen Rändern innerhalb des verjüngten Kanalbereichs verbleiben, so dass das aufgemessene Geschwindigkeitsfeld im Wesentlichen von Randeffekten unbeeinflusst ist. Senkrecht zur Hauptströmungsrichtung wurden sowohl vor dem Schütz im Oberwasser als auch hinter dem Schütz im Unterwasser Querschnitte festgelegt. Die Querschnitte x01 – x04 liegen dabei vor dem Beginn der Kanalverjüngung, die Schnitte x05 – x09 genau im Bereich der Verjüngung und die Schnitte x10 – x15 im verjüngten Bereich unmittelbar vor dem Überfallrücken des Schützes am Beginn der Absenkung des Wasserspiegels. Dabei verringert sich der Abstand der Querschnitte zueinander mit zunehmender Nähe zum Überfallschütz, so dass dessen Auswirkungen auf das Geschwindigkeitsfeld gut darstellbar sind. Im Unterwasser befinden sich die Querschnitte x16 – x33. An jedem Kreuzungspunkt einer Längsachse mit einem Querschnitt wird das Geschwindigkeitsfeld über die Tiefe aufgemessen. Dabei beträgt der vertikale Abstand der Messpunkte im Oberwasser 2.5 cm bei 12 Messpunkten und im Unterwasser aufgrund der geringeren Wassertiefe 1.0 cm bei 6 Messpunkten. Der unterste Messpunkt liegt jeweils 2 cm oberhalb der Sohle, während der oberste Messpunkt sich aufgrund der Eintauchtiefe der ADV-Sonde 5 cm unterhalb des Wasserspiegels befindet.

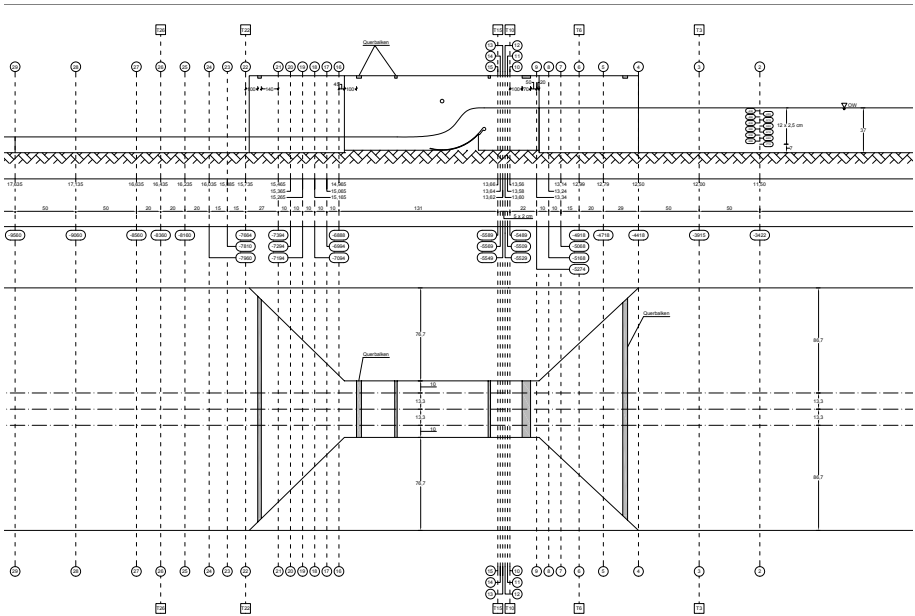
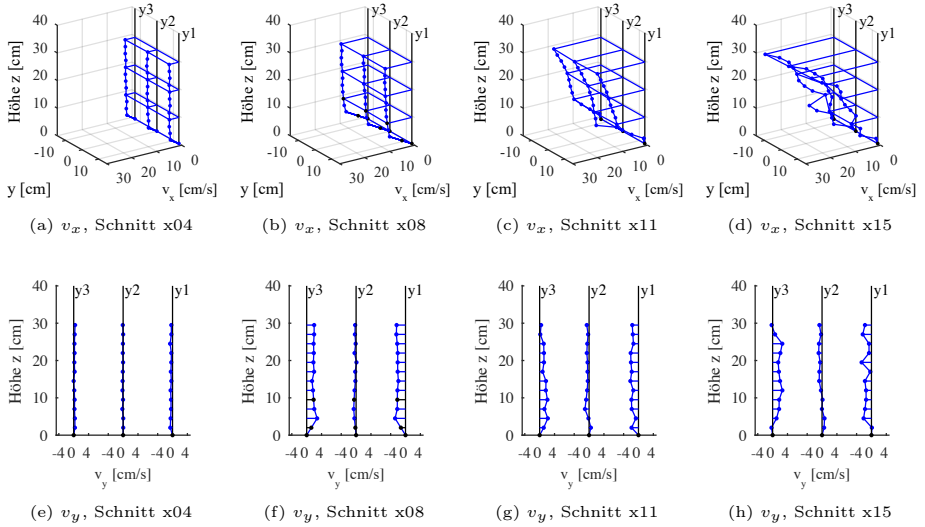


Abb. 4.14: Messpunkte Geschwindigkeitsfeld (oben: Ansicht, unten: Draufsicht)

Abb. 4.15: Geschwindigkeitsfeld, Achsen $y_{01} - y_{03}$

Das Geschwindigkeitsfeld wurde für die Durchflussmengen von 5.81/s, 10.21/s, 16.01/s und 21.81/s vollständig aufgemessen. Für den Durchfluss von 21.81/s wurden zusätzlich auch Mikroflügelmessungen durchgeführt sowie die Wasserspiegellage im unmittelbaren Oberwasserbereich des Schützes mittels Stechpegelmessungen aufgenommen. Diese Untersuchungsergebnisse werden im Folgenden zur Beschreibung des Geschwindigkeitsfeldes herangezogen.

In Abbildung 4.15 ist das Geschwindigkeitsfeld in den drei Längsachsen $y_{01} - y_{03}$ an ausgewählten Querschnitten dargestellt. Dabei geben die Abbildungen 4.15a – 4.15d das Feld der x -Komponente des Geschwindigkeitsvektors wieder, welches im Wesentlichen der Hauptströmungsrichtung entspricht, während die Abbildungen 4.15e – 4.15h das zugehörige Feld der y -Komponente darstellen. Insgesamt ist zu beobachten, dass die x -Komponente der Geschwindigkeit in Querrichtung vorwiegend konstant ist. In deutlicher Entfernung vom Schütz ist die Geschwindigkeit v_x noch sehr gering und über die Wassertiefe nahezu konstant (Abbildung 4.15a). Mit zunehmender Annäherung an das Schütz beschleunigt die Strömung (Abbildung 4.15b), wobei die Beschleunigung im oberen Bereich mit zunehmender Nähe zur Wasseroberfläche wesentlich größer als im unteren Bereich infolge von Sohlreibung und Haftbedingung ist (Abbildungen 4.15c und 4.15d). Der Einfluss des Düseneffektes infolge der Verjüngung im Bereich der Schnitte x04 – x09 lässt sich hingegen gut am Verlauf der Geschwindigkeitskomponente v_y in Schnitt x08 beobachten (Abbildung 4.15f). Die Verjüngung drängt die Wasserpartikel zur Mittelachse und beschleunigt sie so auch quer zur Strömungsrichtung. Hingegen ist die in den Schnitten x11 und x15 zu erkennende v_y -Geschwindigkeit (Abbildungen 4.15g und 4.15h) auf den sich an den Seitenwänden befindenden vertikalen Wirbel hin zurückzuführen,

der ansatzweise auch in Abbildung 4.12b zu erkennen ist. Stets ist jedoch zu beobachten, dass die Strömung in der Mittelachse y02 von der Verjüngung unbeeinflusst bleibt. Dies wird auch besonders deutlich, wenn man die Geschwindigkeitskomponente v_y für die Mittelachse y02 mit sämtlichen Schnitten x01 – x15 des Oberwassers übereinanderliegend darstellt (Abbildung 4.16 rechts). Lediglich eine leichte, aber konstante Abweichung in negative y -Richtung ist zu beobachten, die ggf. auf eine nicht vollständig erfolgte Ausrichtung der ADV-Sonde parallel zu den Längswänden des Kanals zurückzuführen ist. In Abbildung 4.16 (links) ist demgegenüber sehr gut die zuerst über die Tiefe gleichmäßige Verteilung der v_x -Strömungsgeschwindigkeit zu erkennen sowie die mit zunehmender Lauflänge erfolgende Beschleunigung, insbesondere im oberen Bereich in direkter Entfernung zum Schütz. Besonders anschaulich lässt sich das aufgemessene Geschwindigkeitsfeld dreidimensional unter Verwendung von Geschwindigkeitsvektoren darstellen. In Abbildung 4.17 ist dies für die Messpunkte im Oberwasser vorgenommen worden, wobei zusätzlich noch die mittels Stechpegel gemessene Wasserspiegellage in ihrer flächigen Ausprägung visualisiert ist. Sowohl die Geschwindigkeitszunahme mit sich verringern dem Abstand zum Schütz als auch die Symmetrie der Strömung zur Mittelachse sind erkennbar. Unmittelbar vor dem Schütz beschleunigen die oberen Wasserschichten wesentlich stärker und infolge einer von unten nach oben entstehenden vertikalen Strömung werden auch tiefer liegende Wasserschichten über das Schütz abgeführt. Aufgrund der Lage der Messpunkte nicht erfasst wurden hingegen ein in der Mittelachse direkt unterhalb des Schützes sich befindender gegenläufiger Wirbel mit horizontaler Drehachse und Totwasserbereich sowie die beiden vertikalen Wirbel an den Eckbereichen unmittelbar vor dem Schütz, die ebenfalls zu einem Aufstieg von Wasserpartikeln aus tiefen in höhere Schichten führen.

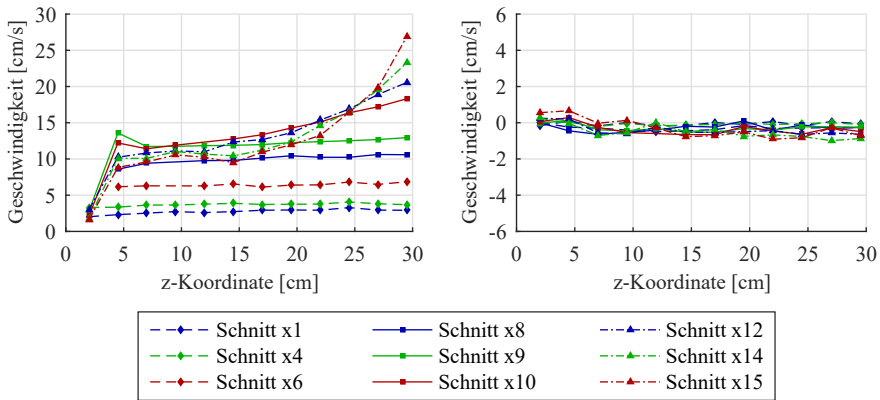


Abb. 4.16: Geschwindigkeitsverteilung v_x (links) und v_y (rechts), Achse y02, Schnitte x01–x15

Aufgrund der Restriktionen bei der Verwendung des ADV-Messgerätes im Hinblick auf die Reflexionen im unteren Bereich sowie die Geschwindigkeitsmessungen unmittelbar unterhalb des Wasserspiegels wurden ergänzend Untersuchungen mittels Mikroflügelschraube durchgeführt. Die Gegenüberstellung in Abbildung 4.18 des Geschwindigkeitsverlaufs v_x aus ADV-Messungen mit dem Betrag der Hauptströmungsrichtung der Mikroflügelschraube zeigt im

Wesentlichen eine Übereinstimmung der beiden Messverfahren. Eine Abweichung zwischen ADV- und Mikroflügel ist speziell im unteren Bereich zu beobachten (Abbildungen 4.18a und 4.18b), in dem infolge der Sohlreibung die Geschwindigkeitsänderung besonders stark ausgeprägt ist. Zusätzlich treten bei der ADV-Sonde in diesem Bereich Reflexionen auf, so dass einzelne Messwerte ungenau oder sogar unbrauchbar sind. Mit zunehmender Ausprägung des Geschwindigkeitsprofils über die Höhe weichen auch ADV- und Mikroflügel-Werte verstärkt voneinander ab, geben aber stets noch denselben Verlauf wieder (Abbildungen 4.18c und 4.18d). Die Abweichungen, die erst in der unmittelbaren Schützumgebung sichtbar werden, können durch das dort ausgeprägte dreidimensionale Strömungsverhalten erklärt werden (vgl. Abbildung 4.17), das jedoch mit der Mikroflügelschraube nicht exakt abbildbar ist. Gegenüber dem ADV, das alle drei Komponenten des Geschwindigkeitsfeldes separat aufnimmt, berücksichtigt die Mikroflügelschraube den Betrag der Geschwindigkeit in Hauptströmungsrichtung, wodurch die Abweichungen zwischen beiden Messverfahren, insbesondere im oberen Bereich, zustande kommen. Durch Kombination von ADV- und Mikroflügel-Messwerten kann das tatsächliche Geschwindigkeitsfeld von der Sohle bis zur Wasseroberfläche jedoch vollständig erfasst werden.

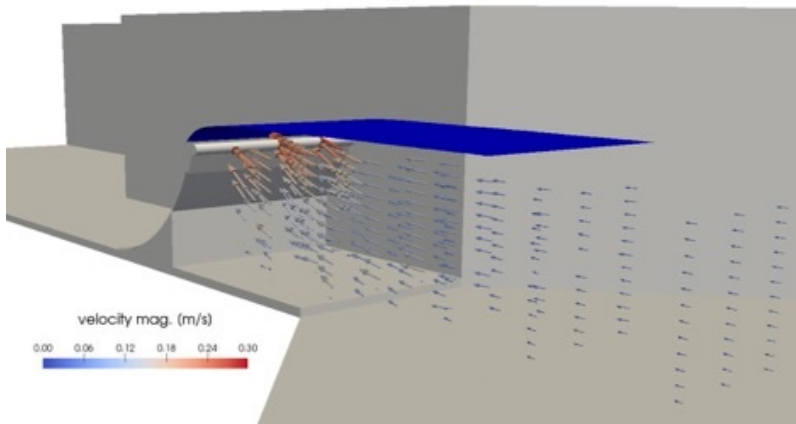


Abb. 4.17: 3D-Geschwindigkeitsfeld mit Wasserspiegellage

Entsprechend den Messungen im Oberwasser wurden auch Geschwindigkeitsmessungen im Unterwasser nach Überströmung des Schützes durchgeführt. Jedoch konnte dies mit dem ADV-Messgerät aufgrund der geringen Wassertiefe nur an wenigen Punkten über die Wassertiefe durchgeführt werden und Messungen mit der Mikroflügelschraube waren aufgrund des hohen Turbulenzcharakters der Strömung nicht durchführbar. Insgesamt ergab sich eine deutlich turbulente Strömungssituation mit einem für numerische Berechnungen nicht vergleichsfähigen Aussagecharakter, so dass die zugehörigen Ergebnisse hier nicht dargestellt werden.

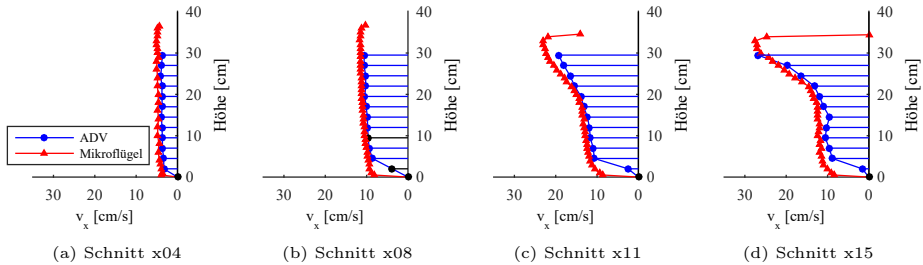
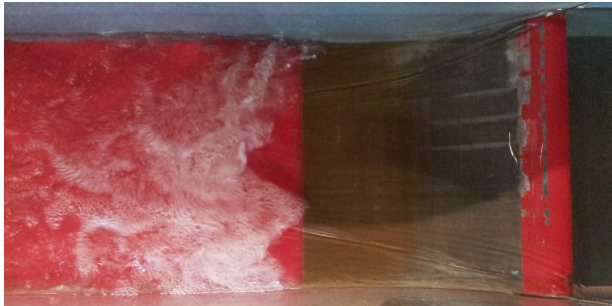


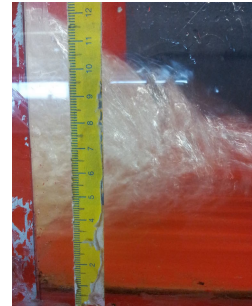
Abb. 4.18: Vertikales Geschwindigkeitsprofil in Achse y02 (blau: ADV, rot: Mikroflügel)

Wechselsprung

Nach Übertreten des Schützkopfes gleitet der Überfallstrahl am Schützblech entlang. Dabei beschleunigt er, so dass sich der Strömungszustand von Strömen auf Schießen verändert. Beim Auftreffen in das Unterwasser, in dem die Strömungsgeschwindigkeit deutlich geringer als über dem Schütz ist, erfolgt eine schlagartige Verzögerung durch Ausbildung eines Wechselsprunges, in dem sich der Strömungszustand wieder von Schießen auf Strömen umkehrt. In



(a) Draufsicht



(b) Wirbelwalze

Abb. 4.19: Wechselsprung im Unterwasser

Abbildung 4.19 ist der noch im Kanalbereich, unmittelbar hinter dem Schütz liegende Wechselsprung abgebildet. Seine Lage ist abhängig vom Unterwasserstand und den dort vorliegenden Strömungsverhältnissen. Bei geringem Unterwasserstand bildet sich der Wechselsprung erst in deutlicher Entfernung zum Schütz aus, während er bei höheren Unterwasserständen wie in Abbildung 4.19a bereits unmittelbar hinter dem Schütz liegt. In Abbildung 4.19b ist die Wirbelwalze des Wechselsprunges in ihrem Querschnitt abgebildet. Die auf einer sehr kurzen Wegstrecke stattfindende Zunahme der Wassertiefe beim plötzlichen Übergang von einem strömenden zu einem schießenden Zustand ist deutlich erkennbar. Unter Verweis auf die in

Abschnitt 4.1 zusammengestellten verschiedenen Wechselsprungausrüstungen handelt es sich hier um einen Wechselsprungtyp mit ausgeprägter Deckwalze und starken Lufteintrag bei $Fr_1 > 1.7$.

Hinterlüfteter Überfallstrahl

Gegenüber der bisher betrachteten regulären Strömungssituation kann bei deutlich höheren Schützstellungen konstruktionsbedingt der Überfallstrahl nicht mehr am Schützblech anliegen, so dass der Strahl frei ins Unterwasser fällt und zwischen ihm und dem Schützblech ein Luftpolster eingeschlossen ist. In Abbildung 4.20a ist der in Form einer Fallparabel frei

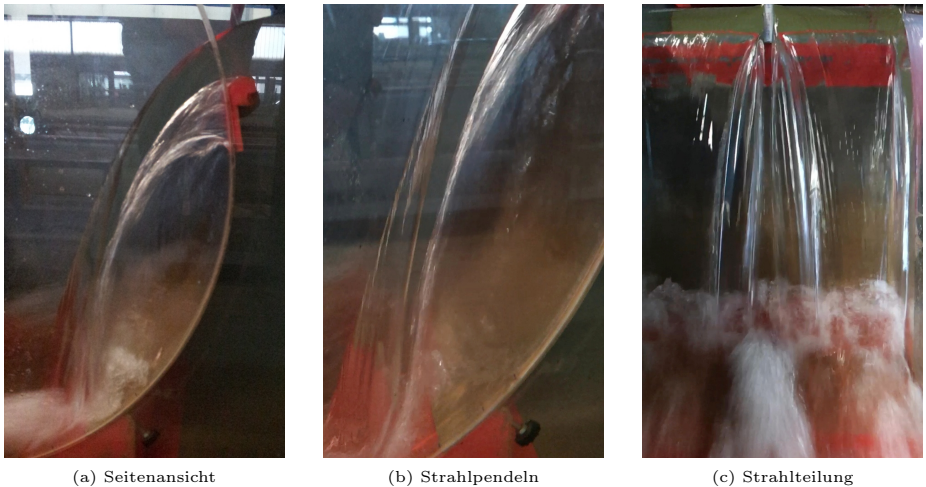


Abb. 4.20: Hinterlüfteter Überfallstrahl

fallende Wasserstrahl mit dem eingeschlossenen Luftpolster bei einer sehr hohen Schützstellung zu sehen. Während der Fallbewegung vom Ober- in das Unterwasser verjüngt sich der Strahlquerschnitt unter Berücksichtigung der Kontinuitätsgleichung. Beim Auftreffen im Unterwasser teilt er sich, wodurch ein Teil in Strömungsrichtung abfließt und der andere Teil eine Wirbelwalze im bodennahen Bereich des eingeschlossenen Luftpolsters bildet. Deutlich sichtbar ist die sehr starke Vermischung der beim Herabfallen mitgerissenen Luft beim Auftreffen ins Unterwasser. Aufgrund des eingeschlossenen Luftpolsters neigt der Überfallstrahl zum Pendeln bzw. Schwingen. Dies wird aufgrund des sich mit zunehmender Fallstrecke verjüngenden Querschnittes insbesondere im unteren Bereich deutlich sichtbar. In Abbildung 4.20b ist die Breite des Pendelbereichs durch Anhaften des Wasserstrahls an der Plexiglasscheibe erkennbar. Die vollständige Beschreibung der Initialisierung der Strahlschwingung und des mechanischen Kopplungsmechanismus zwischen Überfallstrahl, eingeschlossenem Luftpolster

und elastischer Schützkonstruktion ist in [Sch10] ausführlich beschrieben. Meist treten im Zusammenhang mit der Strahlschwingung auch starke Vibrationen an der Schützstruktur auf, die sowohl selbst elastisch ist als auch eine federnde Lagerung besitzt. Dabei wird der komplexe Kopplungsmechanismus von Überfallstrahl, Luftpolster und Konstruktion in der praktischen Umsetzung durch Anbindung des eingeschlossenen Luftpolsters an die Umgebungsluft außer Kraft gesetzt. In Abbildung 4.20c ist die durch einen Strahlteiler vorgenommene Öffnung des Überfallstrahls zu sehen, wodurch der Druck des Luftpolsters sich stets mit dem Umgebungsdruck ausgleichen kann, so dass keine Strahlschwingungen mehr auftreten.

Strahlablösung

Neben der konstruktionsbedingten Hinterlüftung des Überfallstrahles kann diese auch bei einem ursprünglich anliegenden Überfallstrahl selbstständig eintreten. Mit Erhöhung der Durchflussmenge wird in Abhängigkeit der Schützstellung der anliegende Strömungszustand des Überfallstrahls instabil und es erfolgt eine spontane Hinterlüftung, wodurch der Überfallstrahl sich vom Schützblech ablöst. Der hinterlüftete Zustand selbst ist dabei nicht unbedingt stabil, so dass der Überfallstrahl sich abhängig von Durchflussmenge und Schützstellung auch wieder an das Schützblech anlegen kann. Im Rahmen der in dieser Arbeit durchgeführten Experimente



Abb. 4.21: Einsetzen der Strahlablösung und hinterlüfteter Überfallstrahl

konnte der Auslösungsmechanismus und die darauffolgende Strahlablösung ausführlich beobachtet und dokumentiert werden. Während in Abbildung 4.21 die wesentlichen Zustände der Strahlablösung abgebildet sind, sind die einzelnen Schritte des Ablösungsvorganges ausführlich in Abbildung 4.23 dokumentiert. Für den anliegenden Überfallstrahl ist in Abbildung 4.21a zu

erkennen, wie sich am Schützrand beim Übergang zur Kanalwand die Strömung am Schützkopf ablöst und Luftblasen im Überfallstrahl stromabwärts geführt werden. Die in den Blasen gefangene Luft kann hierbei nur von der Oberfläche her über die seitliche Führungsschiene des Schützes herangeführt worden sein. Infolge der mit dem Überfallstrahl stromabwärts transportierten Luftblasen rauht die Wasseroberfläche des Überfallstrahls zum seitlichen Rand hin auf. Aufgrund der nun durchlässigen Wasseroberfläche und des Unterdrucks auf dem Rücken des Überfallschützes tritt Luft in den Wasserstrahl ein (Abbildung 4.21b). Die eintretende Luft bildet dabei eine Luftröhre aus, die über den Überfallkopf hinaus bis in den Oberwasserbereich vor dem Schütz hinein verläuft. Wie in Abbildung 4.22 zu sehen, kann die Luftröhre

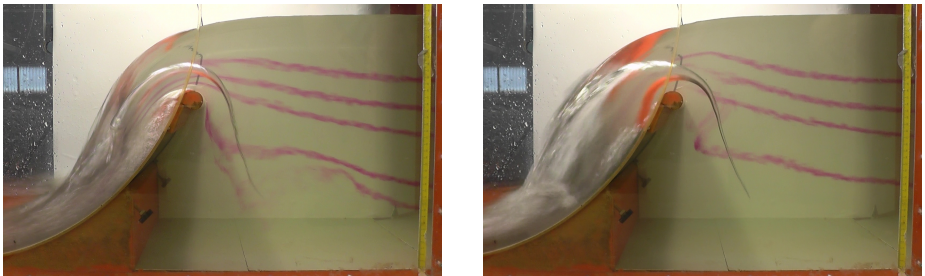


Abb. 4.22: Luftröhre mit Wirbelstruktur

auch sehr tief in das Oberwasser, nahezu bis auf den Kanalboden, eindringen. Dies hängt unmittelbar mit der vor dem Schütz an den Seiten vorhandenen ausgeprägten dreidimensionalen, vertikalen Wirbelstruktur zusammen, die bereits bei den Farbfadenuntersuchungen und Geschwindigkeitsfeldmessungen beobachtet wurde. Diese Wirbelstruktur ist in Abbildung 4.22 durch den sich in einer schraubenden Bewegung um die Luftröhre gelegten Farbfaden kenntlich gemacht. Im Zentrum dieses Wirbels scheint der Druck so niedrig zu sein, dass sich die Luftröhre weit entgegen der Strömungsrichtung ausbilden kann. Über die Luftröhre erfolgt bei ausreichend langer Aufrechterhaltung eine Hinterlüftung des Überfallstrahls von der Seite her (Abbildung 4.21c). In Abhängigkeit der Strömungssituation kann es aber auch sein, dass die Luftröhre sich wieder aus dem Oberwasser zurückzieht und letztendlich sogar auflöst. Auch kann die Ausbildung der Luftröhre gleichzeitig an beiden Seiten des Überfallstrahls erfolgen, so dass die Hinterlüftung des Überfallstrahls von beiden Rändern her stattfindet. Die Luftröhrenausbildung und die mit ihr einhergehende Wirbelstruktur wird bereits von ROUSE in [Rou61] bei bereits abgelösten Überfallstrahlen beobachtet und lediglich als Maßstabseffekt der Laborversuche klassifiziert. Der Randeinfluss als Auslösungsmechanismus der Strahlablösung bei kritischen Strahldicken wird dort noch nicht in Betracht gezogen. Auch ist entgegen der in [Rou61] vertretenen Ansicht, der Randeinfluss für den Strahlablösungsvorgang nicht ausschließlich als Maßstabseffekt zu betrachten, da insbesondere bei beweglichen Wehren infolge der Lager- und Steuerungskonstruktionen der Überfallstrahl stets seitlich aufgerauht ist, so dass sich Luftröhren am Rand auch in der Natursausführung ausbilden können und so die Strahlablösung initiieren.

Der Ablösungsvorgang wird besonders gut in der Draufsicht auf den Überfallstrahl in Abbildung 4.23 sichtbar. Zum Zeitpunkt t_1 (Abbildung 4.23a) wird aufgrund des Unterdruckes über dem Überfallschütz Luft über die seitliche Führungsschiene bis zum Schützkopf hin angesogen, so dass sich, wie auch in Abbildung 4.21a zu sehen, die Strömung dort blasenförmig ablöst und die Oberfläche der Überfallstrahles aufraut. Durch die aufgeraute Oberfläche kann zum Zeitpunkt t_2 (Abbildung 4.23b) Luft in den Überfallstrahl eintreten, wodurch sich eine Luftröhre ausbildet, die in gekrümmter Form über den Kopf des Schützes teilweise bis tief hinein in den Oberwasserbereich vor dem Schütz verlaufen kann. Ausgehend von dieser Luftröhre, in deren Innerem der Umgebungsdruck herrscht, wird der Überfallstrahl zum Zeitpunkt t_3 seitlich belüftet (Abbildung 4.23c). Die Belüftung breitet sich dann sehr schnell über die gesamte Breite des Schützes aus (Abbildung 4.23d), so dass zum Zeitpunkt t_5 der gesamte Überfallstrahl hinterlüftet und vom Schützblech abgelöst ist (Abbildung 4.23e). Nach einiger Zeit bildet sich am abgelösten Überfallstrahl erneut eine Luftröhre aus, wodurch weitere Luft zum von der Umgebung ansonsten abgeschlossenen Luftpolder hinter dem Überfallstrahls gelangen kann, so dass zum Zeitpunkt t_6 (Abbildung 4.23f) der Wasserspiegel in der Hinterlüftung noch weiter absinkt. Über die Zeit wächst der Wasserspiegel in der Hinterlüftung dann wieder an, da Luftpartikel vom Überfallstrahl mitgerissen und in das Unterwasser abtransportiert werden, wodurch sich das Volumen des eingeschlossenen Luftpolders verkleinert. Jedoch bildet sich nach einiger Zeit wiederholt eine Luftröhre aus, so dass der Wasserspiegel in der Hinterlüftung zwischen den Zuständen der Zeitpunkte t_5 und t_6 stetig hin und her pendelt.

Bei dem beobachteten Hinterlüftungsmechanismus handelt es sich um einen ausgeprägt dreidimensionalen Vorgang. Der Lufteintrag erfolgt über die vertikalen Führungsschienen des Schützes, die gekrümmte Luftröhre bildet sich entgegen der Strömungsrichtung in einer Ebene senkrecht dazu aus und letztendlich wandert die Hinterlüftung unterhalb des Überfallstrahles entlang des Schützkopfes. Darüber hinaus besitzt der vor dem Schütz liegende vertikale Wirbel, der von entscheidender Bedeutung für die Ausbreitungsrichtung der Luftröhre ist, selbst eine ausgeprägte dreidimensionale Struktur. Damit ist eine numerische Nachberechnung und Untersuchung des Ablösungsvorganges nur möglich, wenn die geometrischen Details der Konstruktion im Modell vollständig berücksichtigt werden sowie die Modellierung konsequent dreidimensional stattfindet. Im Hinblick auf die vorhandene Rechen- und Speicherkapazität und die zur Modellerstellung und -auswertung notwendige Arbeitszeit war es daher im Rahmen dieser Arbeit nicht möglich, den selbstständigen Ablösungsvorgang näher numerisch zu untersuchen. Insbesondere im Hinblick auf den Charakter der Schützüberströmung als Vorstudie zur Untersuchung der Durchströmungsvorgänge am Wasserrad wird bei den nachfolgend durchgeführten numerischen Berechnungen in Abschnitt 4.3 nur die Schützüberströmung mit anliegendem Überfallstrahl eingehender untersucht.



(a) Zeitpunkt t_1



(b) Zeitpunkt t_2



(c) Zeitpunkt t_3



(d) Zeitpunkt t_4



(e) Zeitpunkt t_5



(f) Zeitpunkt t_6

Abb. 4.23: Ablösungsvorgang

4.3 Numerische Untersuchungen

4.3.1 Vorbemerkungen

Nach Zusammenstellung der theoretischen Grundlagen von Gerinne- und Schützüberströmung in Abschnitt 4.1 wird das in Abschnitt 4.2 bereits experimentell betrachtete Überströmungsverhalten am Kreisbogenschütz nun auch mit dem in Kapitel 3 erarbeiteten Diskretisierungsverfahren numerisch näher untersucht. Dabei gewährleisten die begleitend durchgeführten experimentellen Untersuchungen, dass die Berechnungsergebnisse validiert werden können. Gleichzeitig bieten die numerischen Ergebnisse aufgrund ihres Feldcharakters die Möglichkeit, die experimentellen Daten um weitere Lösungsinformationen zu ergänzen. Insgesamt sind dabei die nur augenscheinlich einfache Geometrie des Kreisbogenschützes sowie die auftretende Strömungscharakteristik bereits hinreichend komplex, so dass der Modellerstellung mit Gebietsdiskretisierung und Lösungsvorgehen eine wesentlich stärkere Aufmerksamkeit als bei den in Kapitel 3 untersuchten numerischen Testbeispielen zu schenken ist.

Die Überfallströmung am Kreisbogenschütz wird infolge der starken Vermischung von Wasser- und Luftphase, wie sie insbesondere am Eintauchpunkt des Überfallstrahles in das Unterwasser auftritt, als 2-Phasen-Strömung nach Abschnitt 3.3.2 beschrieben. Das dort entwickelte Diskretisierungsverfahren auf Basis von finiten Raum-Zeit-Elementen mit einer impliziten Beschreibung der Grenzfläche anhand einer *Level-Set*-Funktion ermöglicht eine robuste und dennoch genaue Abbildung der am Überfallschütz auftretenden Strömungsphänomene, insbesondere der Interaktion und Vermischung von Wasser- und Luftphase.

Angelehnt an die experimentellen Untersuchungen sind verschiedene Strömungssituationen numerisch näher betrachtet worden, deren unterschiedliche Materialparameterkonfigurationen in der densimetrischen Froude-Zahl Fr_{den} zur Kennzeichnung eines Parametersatzes zusammengefasst sind. Ausführlich ist hierbei das Überströmungsverhalten für $Fr_{\text{den}} = 0.23$ in Abschnitt 4.3.3 analysiert, während in Abschnitt 4.3.4 die Ergebnisse der vollständigen Parameterstudie für den Bereich $0.07 \leq Fr_{\text{den}} \leq 0.41$ zusammengefasst sind. Zuerst erfolgt jedoch in Abschnitt 4.3.2 die Gebietsbeschreibung, ihre Diskretisierung sowie die Zusammenstellung der den Berechnungen zugrunde liegenden Anfangs- und Randbedingungen.

4.3.2 Berechnungsbeispiel

Gebiet. Das Berechnungsgebiet ist in Abbildung 4.24 dargestellt. Es stellt eine Nachbildung der Mittelebene (Messachse y_{02}) der bei den experimentellen Untersuchungen aus Abschnitt 4.2 verwendeten Geschieberinne mit eingesetztem Schützmodell dar. Die Abmessung des Gesamtgebietes beträgt in Längsrichtung 15 m mit $8.5 \text{ m} \leq x \leq 23.5 \text{ m}$. Dabei basiert die Wahl von Anfangs- und Endpunkt des Berechnungsgebietes auf den bei den experimentellen Untersuchungen gemachten Beobachtungen der Strömung und ist so gewählt, dass Vor- und Nachlaufbereich einen ausreichenden Abstand zum Schütz besitzen, um die dort stattfindende Strömungscharakteristik nicht zu beeinflussen. In vertikaler Richtung ist das Gebiet mit $0.0 \text{ m} \leq y \leq 1.0 \text{ m}$ gewählt. Dabei wurde die obere Berandung des Berechnungsgebietes mit $y = 1.0 \text{ m}$ festgelegt, da angenommen wird, dass die Luftströmung in dieser Höhe keinen

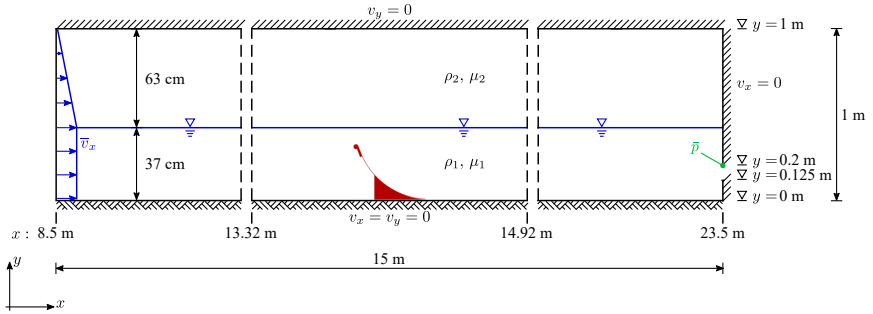


Abb. 4.24: Berechnungsgebiet mit Schützmodell sowie Rand- und Anfangsbedingungen

Einfluss mehr auf die Wasserströmung im Schützbereich hat. Das Schützmodell selbst ist wie auch bei den experimentellen Untersuchungen zwischen 13.7067 m (Vorderkante Schützkopf) und 14.0977 m (Ende Schützblech) positioniert, wobei die Oberkante des Schützkopfes bei $y = 30$ cm liegt (Schützstellung OK-30). Die Unterteilung des Gesamtgebietes in einen Vorlaufbereich von $8.5 \text{ m} \leq x \leq 13.32 \text{ m}$, die unmittelbare Schützumgebung mit $13.32 \text{ m} \leq x \leq 14.92$ und einen Nachlaufbereich von $14.92 \text{ m} \leq x \leq 23.50 \text{ m}$ unterstützt eine bereichsweise angepasste Vernetzung.

Vernetzung. Die Vernetzung des Gesamtgebietes erfolgt bereichsweise. Vor- und Nachlaufgebiet sind mit 13 440 bzw. 16 800 längsgestreckten Rechteckelementen strukturiert vernetzt. Dabei sind jeweils 84 Elemente im Vor- und Nachlaufgebiet über die Höhe verteilt und 160 bzw. 200 Elemente in Längsrichtung angeordnet und somit deren Seitenverhältnis zwischen 1.7 und 4.0 variiert. Demgegenüber ist das unmittelbare Schützgebiet in 14 912 Elemente mit 15 217 Knoten unterteilt und infolge der komplexen Berandung des Schützes unstrukturiert vernetzt. Insgesamt besteht das diskretisierte Gesamtgebiet aus 45 152 Elementen mit 45 825 Knoten. Die Elementierung erfolgt mit den in Abschnitt 3.3.2 beschriebenen Q1Q1-Elementen mit 4 Knoten und linearen Ansatzfunktionen für die Geometrie. In Abbildung 4.25 ist die Vernetzung in der unmittelbaren Umgebung des Schützes zu sehen. Ausgehend von den Rändern erfolgt eine kontinuierliche Netzverfeinerung hin zum Schütz, so dass insbesondere am Schützkopf die feinste Vernetzung mit einer Elementkantenlänge von durchschnittlich 2.6 mm vorliegt. Die Netztopologie wurde sowohl im Hinblick auf die erwartete Strömungscharakteristik als auch unter Gewährleistung einer geeigneten Elementqualität hin entworfen. Dazu wurden neben weiteren charakteristischen Maßzahlen die in Abbildung 4.26 dargestellte skalierte Determinante $\det(\mathbf{J})$ sowie die Konditionszahl $\text{cond}(\mathbf{J})$ der Element-JAKOBI-Matrix berücksichtigt. Sowohl in Abbildung 4.26a als auch in Abbildung 4.26b ist zu erkennen, dass sowohl Determinante als auch Konditionszahl der einzelnen Elemente an keiner Stelle ihren zulässigen Wertebereich von $0.5 \leq \det(\|\mathbf{J}\|) \leq 1.0$ bzw. $1 \leq \text{cond}(\mathbf{J}) \leq 4$ verlassen. Damit ist nicht nur der Fehler bei der Lösungsübertragung vom lokalen Element-Referenzgebiet auf das tatsächliche Elementgebiet niedrig, sondern auch die Lösungsempfindlichkeit des Gesamtgleichungssystems verbleibt in einem akzeptablen Rahmen. Neben der räumlichen Diskretisierung

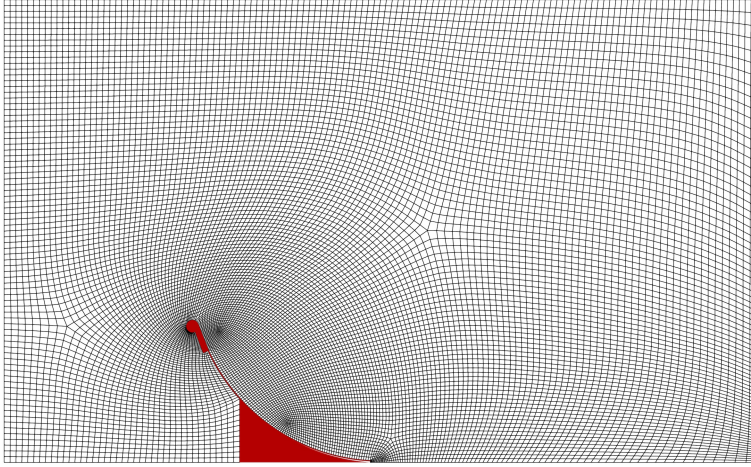


Abb. 4.25: Vernetzung Nahbereich Schütz ($13.32 \text{ m} \leq x \leq 14.92 \text{ m}$)

wird für die Diskretisierung der Zeitachse eine Schrittweite von $\Delta t = 1 \times 10^{-2} \text{ s}$ gewählt, wodurch in Kombination mit dem verwendeten Q1Q1-Elementtyp insgesamt je Zeitschritt ein iterativ zu lösendes Gleichungssystem mit 316 216 Unbekannten vorliegt.

Rand- und Anfangsbedingungen. Das Berechnungsgebiet wird von zwei Fluiden mit den Dichten $\rho_1 = 1000 \text{ kg/m}^3$ sowie $\rho_2 = 910 \text{ kg/m}^3$ und der jeweils zugehörigen dynamischen Viskosität $\mu_1 = \mu_2 = 1 \times 10^{-3} \text{ (Ns)/m}^2$ belegt, welche einer vertikal wirkenden Erdbeschleunigung von $g = 10 \text{ N/kg}$ unterliegen. Fluid 1 repräsentiert hierbei die Wasserphase, während Fluid 2 die Luftphase darstellt. Bei dem in Abbildung 4.24 dargestellten Ausgangszustand liegt

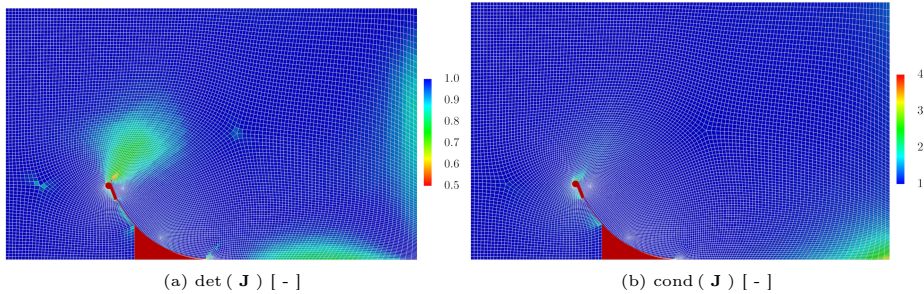


Abb. 4.26: Netzqualität Nahbereich Schütz

eine ausgespiegelte Grenzflächenlage vor, die bei $y_{\text{int.}} = 37.0 \text{ cm}$ das Berechnungsgebiet horizontal teilt. Die Lage der Grenzfläche stimmt mit den in Abschnitt 4.2 durchgeführten experimentellen Untersuchungen überein. Ausgehend von einem ruhenden Strömungszustand wird am Einströmrand die Strömungsgeschwindigkeit kontinuierlich angefahren, bis bei $t = 10 \text{ s}$ die endgültige Verteilung

$$v_x = \begin{cases} \bar{v}_x & \forall \quad y \leq y_{\text{int.}} \quad (\text{Wasserphase}) \\ \bar{v}_x \cdot \frac{1 - y}{y_{\text{max.}} - y_{\text{int.}}} & \forall \quad y > y_{\text{int.}} \quad (\text{Luftphase}) \end{cases} \quad (4.18)$$

mit der maximalen horizontalen Einströmgeschwindigkeit $\bar{v}_x = 0.1354 \text{ m/s}$ sowie $y_{\text{int.}} = 37 \text{ cm}$ als festliegender Höhe der Grenzschicht am Einströmrand und der maximalen Höhenkoordinate $y_{\text{max.}} = 1.0 \text{ m}$ erreicht wird. Dabei erfolgt der Fluideintritt ausschließlich horizontal, so dass die vertikale Einströmgeschwindigkeit verschwindet, $\bar{v}_y = 0$. Gegenüber dem durchgehend geöffneten Einströmrand ist am Ausströmrand lediglich eine kleine Öffnung mit $12.5 \text{ cm} \leq y \leq 20.0 \text{ cm}$ zum freien Ausfluss freigegeben. An ihrem oberen Ende wird das Druckniveau mit $\bar{p} = 0$ gesetzt. Für den gesamten unteren Rand, inklusive der gesamten Schützoberfläche gelten *no-slip*-Randbedingungen, während am oberen und rechten Rand, mit Ausnahme der Ausflussöffnung, *slip*-Randbedingungen gesetzt sind. Die Reinitialisierung der Level-Set-Funktion erfolgt alle 10 Zeitschritte.

Parametersatz. Zur Kennzeichnung dieses Berechnungsbeispiels innerhalb einer Parameterstudie, wie sie in Abschnitt 4.3.4 durchgeführt wurde, können die physikalischen Parameter unter Verwendung der konstanten Geschwindigkeit am Einströmrand \bar{v}_x und der dort ebenfalls unveränderlichen Grenzflächenlage $h = 0.37 \text{ m}$ mit der Dichtedifferenz $\Delta\rho = \rho_1 - \rho_2$ anhand der densimetrischen FROUDE-Zahl zusammengefasst werden

$$\text{Fr}_{\text{den}} = \frac{\bar{v}_x}{\sqrt{\frac{\Delta\rho}{\rho_1} g h}} = 0.23. \quad (4.19)$$

In dieser Verwendung kennzeichnet die densimetrische FROUDE-Zahl nicht nur den Fließzustand unmittelbar am Einströmrand, sondern vielmehr den Satz der physikalischen Parameter zusammengefasst als dimensionslose Kennzahl.

4.3.3 Strömungsanalyse

Strömungscharakteristik. Ausgehend von einem ausgespiegeltem Wasserstand in Ober- und Unterwasser beginnt nach Anfahren der Zuströmung und Freigeben der Ausflussöffnung der Unterwasserspiegel abzusinken. Bis zur stationären Ausbildung der Überfallkurve werden dabei insgesamt vier Strömungszustände durchfahren. Anfangs bilden sich die in Abbil-

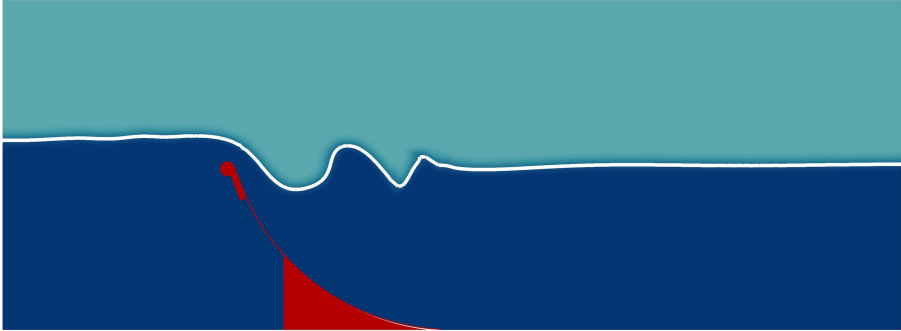


Abb. 4.27: Interaktion Fluidphasen; Oberflächenwellenbildung (Zustand 1, $t = 9.0 \text{ s}$)

dung 4.27 dargestellten Oberflächenwellen vergleichbar der in Abschnitt 3.3.3 betrachteten Überströmung einer Sohlschwelle. Infolge des nicht ausreichend schnellen Abströmens des Un-

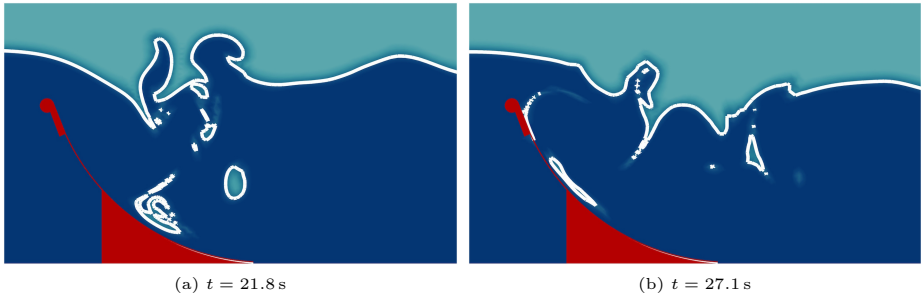


Abb. 4.28: Interaktion Fluidphasen; Tauchstrahl mit Lufteinschlüssen, (Zustand 2)

terwassers kann sich noch keine vollständige Überfallkurve entwickeln. Stattdessen kommt es zur Ausbildung eines Tauchstrahls, der mit dem unmittelbar über und hinter dem Schütz entstandenen Wechsprungbereich interagiert. Dabei entstehen aufgrund von Wellenüberschlägen Lufteinschlüsse, welche bis hinunter auf das Schützblech gedrückt werden (Abbildung 4.28a). Dort werden sie in Abhängigkeit ihres Auftreffpunktes entweder stromabwärts oder bei Kontakt mit dem sich direkt am Schützblech ausgebildeten Überfallwirbel rückströ-

mend hin zum Schützkopf bewegt (Abbildung 4.28b). Im Laufe des Bewegungsprozesses hin zum Schützkopf verbleibt ein Teil der Luftblase haftend in der Mitte des Schützbleches, während der bis zum Schützkopf transportierte Anteil auf der Vorderseite des Überfallwirbels wieder der Hauptströmung zugeführt wird. Damit können sich während dieses Strömungszustandes Luftpartikel am Schützblech anlagern und ein Luftpolster ausbilden. Sinkt nun der

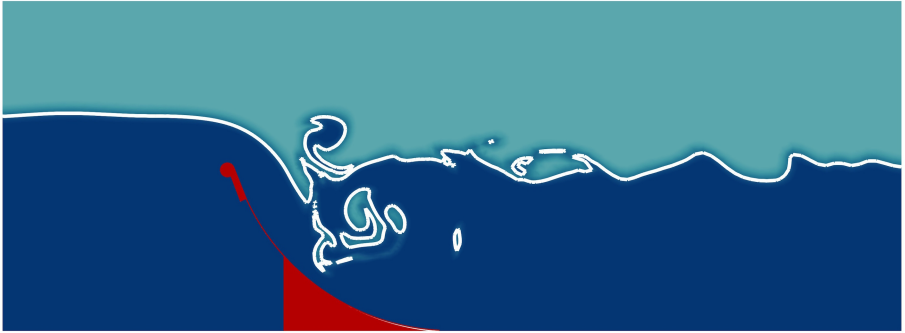


Abb. 4.29: Interaktion Fluidphasen; hocheingestauter Überfall (Zustand 3, $t = 16.0$ s)

Unterwasserspiegel spürbar ab, so kann sich eine kurze Überfallkurve mit anschließendem Tauchstrahl entwickeln (Abbildung 4.29). Im Eintauchbereich über dem Schütz beginnt unmittelbar der Wechselsprungbereich, in dem es mit sich überschlagenden Wellenfronten zu Lufteinschlüssen kommt, die jedoch nicht mehr bis zum Schützblech hinab gedrückt, sondern stromwärts transportiert werden. Gleichzeitig breiten sich vom Eintauchbereich Oberflächenwellen in das Unterwasser aus. Bei weiterem Absinken des Unterwasserspiegels wird die



Abb. 4.30: Interaktion Fluidphasen; tiefeingestauter Überfall (Zustand 4, $t = 35.9$ s)

Ausbildung der Überfallkurve prägnanter und der Tauchstrahl über dem Schütz verschwindet (Abbildung 4.30). Darüber hinaus entwickelt sich der bisherige Interaktionsbereich zwi-

schen Tauchstrahl und den sich überschlagenden Wellenfronten in einen deutlich ausgeprägten Wechsellprungbereich. Dabei treffen die sich überschlagenden Wellenfronten auch auf den Überfallstrahl und drücken diesen wiederholt kurzzeitig zusammen. Die verringerte Strahldicke erhöht die Strömungsgeschwindigkeit im Überfallstrahl, so dass der aus ihm hervorgehende Grundstrahl beim Übergang in das Unterwasser bodennah impulsartige Geschwindigkeitsstöße einleitet, welche eine überschlagende Wellenbildung im Wechsellprungbereich verstärken. Deutlich erkennbar ist die sich am Schützblech unterhalb des Kopfes angelagerte Luftblase, die jedoch infolge des gegenüber Zustand 2 tiefer liegenden Auftreffpunktes des Überfallstrahls keinen weiteren Nachschub an Luftpartikeln erfährt. Schlussendlich hat sich nach Absinken des

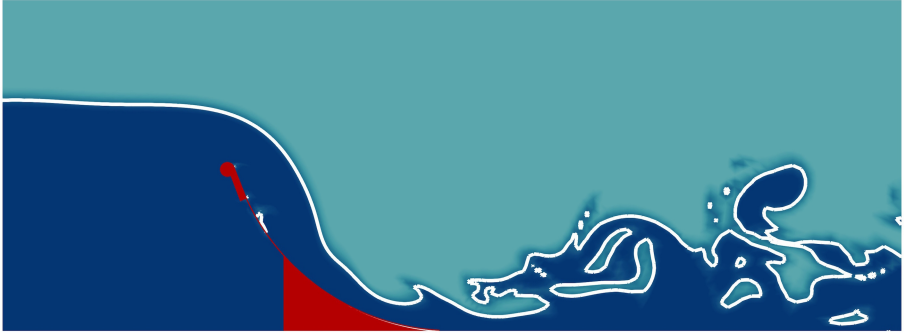
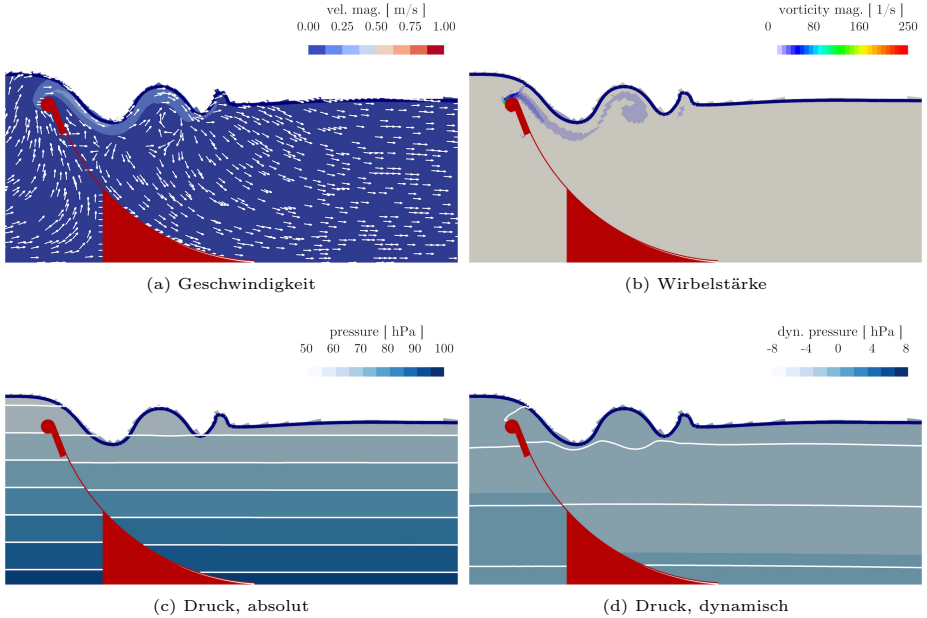


Abb. 4.31: Interaktion Fluidphasen; vollkommener Überfall (Zustand 5, $t = 50.0$ s)

Unterwasserspiegels auf seine Endlage der Wechsellprungbereich mit den dort sich überschlagenden Wellenfronten weiter stromabwärts bewegt, so dass er keine unmittelbare Auswirkung auf die Topologie des Überfallstrahls und der dort vorliegenden Strömungscharakteristik mehr hat. Es liegt der in Abbildung 4.31 dargestellte vollkommene Überfall vor. Die Oberseite des Überfallstrahls ist dabei parabelförmig, während der Verlauf der Unterseite durch die Krümmungsgeometrie des Schützes festgelegt ist. Wie bereits im Zustand 4 verbleibt auch hier die ursprünglich im Zustand 2 an das Schützblech transportierte Luft als kleine Blase unterhalb des Kopfes am Schützblech im Grenzschichtbereich. Am Auftreffpunkt des Überfallstrahles kommt es nach Rückzug des Wechsellprungbereichs infolge einer leichten Pendelbewegung des Strahles selbst zu impulsartigen Strahlstößen. Die Pendelbewegungen stehen in Übereinstimmung mit den in Abschnitt 4.1.2 diskutierten Phänomenen.

Zustand 1: Oberflächenwellen. Für den Zustand 1, bei dem die Bildung von Oberflächenwellen erfolgt, sind die zugehörigen wesentlichen Strömungsfelder in Abbildung 4.32 dargestellt. Abweichend zu Abbildung 4.27 wurde hier aufgrund der besseren Sichtbarkeit der Zeitpunkt $t = 8.5$ s gewählt. Die Überströmung des oberflächennahen Schützkopfes führt bei einem fast ausgespiegelten Wasserstand von Ober- und Unterwasser zur Entstehung von Oberflächenwellen, wie sie auch bei der Überströmung einer Sohlschwelle entstehen (vgl. Abschnitt 3.3.3). In Abbildung 4.32a ist zu erkennen, dass die Hauptströmung ausschließlich oberflächennah beginnend am Schützkopf stattfindet und ein Wirbel unmittelbar unterhalb

Abb. 4.32: Strömungsfeld; Oberflächenwellenbildung (Zustand 1, $t = 8.5$ s)

der Oberflächenwelle liegt, der diese transportiert. Die Wirbelbildung geht dabei, wie in Abbildung 4.32b sichtbar, von der Grenzschicht des Schützkopfes aus und wird von der Hauptströmung oberflächennah stromabwärts transportiert. Demgegenüber ist das Druckfeld von der Strömung weitestgehend unbeeinflusst (Abbildung 4.32c), wie es auch für schwerkraftgetriebene Freispiegelströmungen zu erwarten ist. Zerlegt man hingegen additiv den absoluten Druck in einen hydrostatischen und einen strömungsbeeinflussten hydrodynamischen Anteil, so werden, wie in Abbildung 4.32d dargestellt, die Auswirkungen der Oberflächenströmung als Druckschwankungen sichtbar. Die lokale, nur oberflächennahe Auswirkung der Strömung auf das Druckfeld am Schützkopf und der Grenzschicht zwischen Wasser und Luft wird dadurch deutlich.

Zustand 2: Rückgestauter Überfall. Entgegen der fast ausschließlichen oberflächennahen Strömung des Zustandes 1 ist beim rückgestauten Überfall das Strömungsgeschehen, wie in Abbildung 4.33 deutlich wird, über die gesamte Wassertiefe vorhanden. Neben den beiden in Abbildung 4.28 dargestellten Zeitpunkten des Zustandes 2, in dem das Auftreten und die Verteilung von Lufteinschlüssen am Schütz sichtbar wird, ist zur besseren Verdeutlichung für die genauere Betrachtung des Strömungsfeldes der Zeitpunkt $t = 25.1$ s in Abbildung 4.33 ausgewählt worden. Der nicht ausreichende Abfluss des Unterwassers führt zu einem Rückstau des

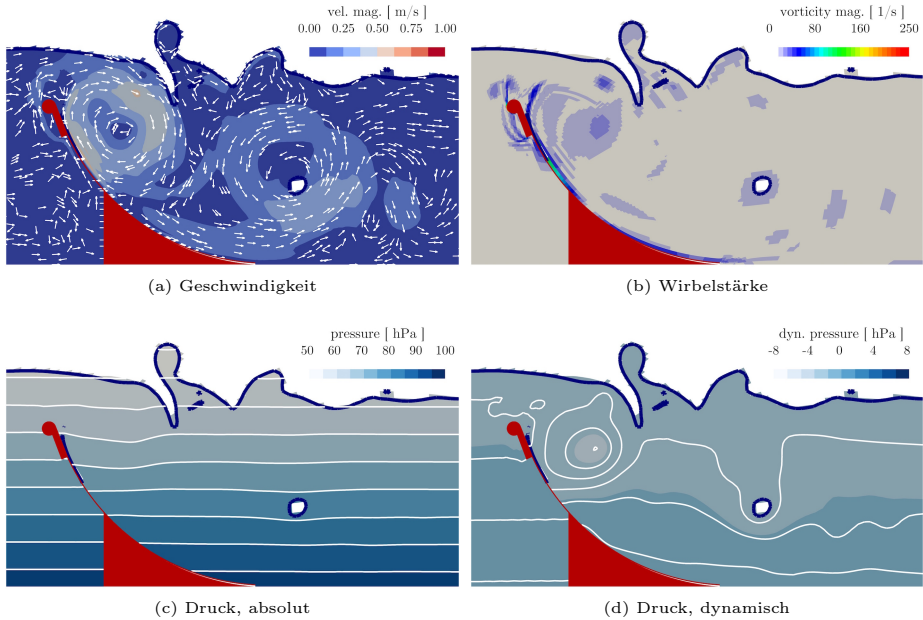


Abb. 4.33: Strömungsfeld; rückgestauter Überfall (Zustand 2, $t = 25.1\text{ s}$)

Überfallstrahl, der zur Ausbildung des in Abbildung 4.33a deutlich sichtbaren großen Überfallwirbels über dem Schütz führt, welcher mit einem ebenfalls sehr großen Wechselsprungwirbel in Interaktion steht. Der Überfallwirbel hebt den sich eigentlich am Schütz ausbilden- den Überfallstrahl stark an, welcher nach Überströmen des Schützkopfes auf der Oberseite des Überfallwirbels fast unmittelbar als Tauchstrahl zum Schützblech hin transportiert wird. Diese Strömungsrichtung ist für den Transport der Lufteinschlüsse aus Abbildung 4.28 verantwort- lich. Abhängig vom Auftreffpunkt der Strömungspartikel auf dem Schützblech entscheidet sich, ob sie rückströmend im Überfallwirbel zum Schützkopf transportiert werden oder sich abströmend in den Wechselsprungwirbel und letztendlich in das Unterwasser bewegen. Beide Wirbel pendeln bei ihrer Interaktion um ihre jeweilige Mittellage, wodurch die Strömungs- geschwindigkeit im Tauchstrahl pulsiert, was den Wechselsprungwirbel anregt und auch zu einer weiteren Wirbelbildung im Wechselsprung- und Abströmbereich führt. Gegenüber dem Zustand 1 setzt hier, wie in Abbildung 4.33b deutlich erkennbar, die Wirbelbildung nicht nur im Bereich des Schützkopfes ein, sondern findet im Wesentlichen in der Grenzschicht am Schützblech und auf der Vorderseite des Überfallwirbels statt. In Abbildung 4.33d ist der Über- fallwirbel ebenfalls deutlich im dynamischen Anteil des Druckfeldes zu erkennen, während der Wechselsprungwirbel etwas weniger ausgeprägt ist. Insgesamt jedoch zeigt Abbildung 4.33c, dass beide Wirbelstrukturen nur eine geringfügige Abweichung des absoluten Druckes von der hydrostatischen Verteilung bewirken.

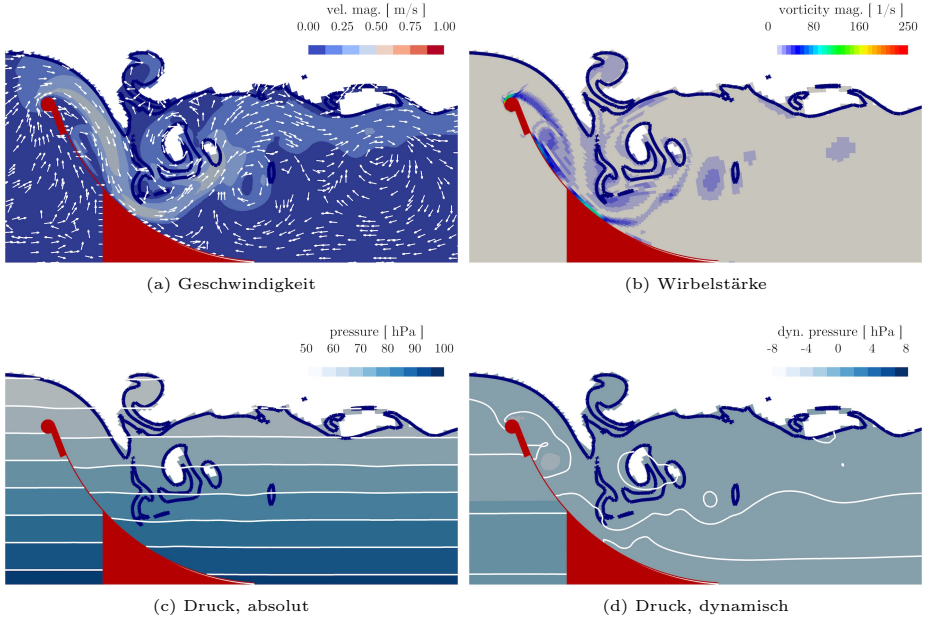


Abb. 4.34: Strömungsfeld; hocheingestauter Überfall (Zustand 3, $t = 16.0$ s)

Zustand 3: Hocheingestauter Überfall. Liegt der Unterwasserspiegel etwas niedriger als der Oberwasserstand, so bildet sich der in Abbildung 4.29 bereits kurz diskutierte Überfall mit anschließendem Tauchstrahl aus. Das zugehörige Strömungsfeld ist in Abbildung 4.34 dargestellt. Der kurze Überfallstrahl nimmt auf der Oberseite die Form eines Freistrahls an, während seine Unterseite auf den zwei in Abbildung 4.34a im Geschwindigkeitsfeld erkennbaren Wirbeln liegt, die sich direkt am Schützblech befinden. Der untere der beiden Wirbel ist dabei der Überfallwirbel, während der obere Wirbel den Totwasserbereich infolge des Abreißen der Strömung am Schützkopf darstellt. Gut erkennbar ist, dass der Grenzbereich zwischen den beiden am Schützblech anliegenden Wirbeln und dem Überfall- bzw. Tauchstrahl ebenfalls der Freistrahllinie folgt. Nach Eintauchen des kurzen Überfalls in das Unterwasser und Weiterlaufen als Tauchstrahl trifft dieser auf das Schützblech und wird dadurch nach oben hin zur Oberfläche abgelenkt. An der Oberfläche teilt sich die Hauptströmung zum einen rückströmend in das Wirbelgebiet des Wechselsprungbereichs auf, zum anderen bildet der andere Teil abströmend große Wirbelstrukturen im Unterwasser aus. In Abbildung 4.34b sind deutlich die maßgebenden Bereiche der Wirbelentstehung erkennbar: Neben der Grenzschicht an der Oberseite des Schützkopfes, unmittelbar bevor die Hauptströmung dort ablöst, sind die Grenzschichtbereiche am Schützblech beim Überfallwirbel sowie im Auftreffbereich des Tauchstrahls maßgebend. Die dort entstandenen Wirbel werden dann mit der Strömung abtransportiert oder sammeln sich im Inneren des Überfallwirbels. Im Gegensatz zu Geschwindigkeits- und

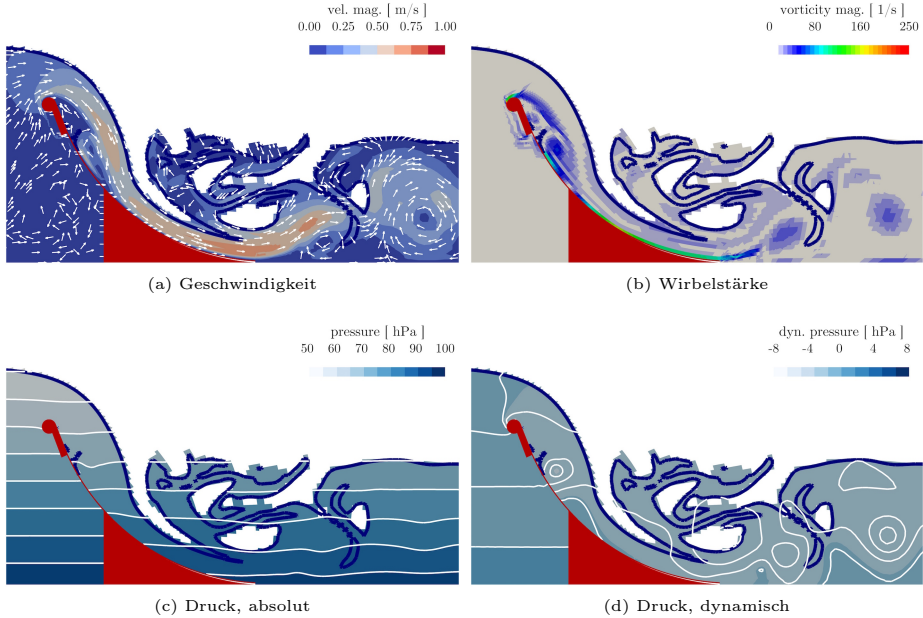


Abb. 4.35: Strömungsfeld; tiefeingestauter Überfall (Zustand 4, $t = 34.7$ s)

Wirbelfeld führt das Strömungsgeschehen, wie in Abbildung 4.34c zu sehen, auch weiterhin nur zu einer geringen Abweichung von einer hydrostatischen Druckverteilung. Hingegen sind in Abbildung 4.34c die Auswirkungen der vorhandenen Wirbel im dynamischen Anteil des Druckfeldes insbesondere am Schütz, aber auch im Abströmgebiet des Unterwassers gut zu erkennen. Ablöse- und Überfallwirbel am Schütz haben zu einem Unterdruckgebiet geführt, das sogar eine geringe Auswirkung auf die absolute Druckverteilung hat. Demgegenüber beeinflussen der abströmende Tauchstrahl und die dadurch hervorgerufenen großen Wirbel im Unterwasser zwar den dynamischen Druckanteil sichtbar, wirken sich aber im absoluten Druckfeld nur noch als minimale Variationen aus.

Zustand 4: Tiefeingestauter Überfall. Sinkt bei ausgebildeter Überfallkurve der Unterwasserstand weiter ab, so geht der Überfall von einer hoch- in eine tiefeingestaute Situation über, bleibt aber weiterhin aufgrund der Beeinflussung des Strahles im unteren Bereich durch den Wechselsprungbereich unvollkommen. Gegenüber des für den Zustand 4 in Abbildung 4.30 dargestellten Zeitpunktes wird in Abbildung 4.35 der Zeitpunkt $t = 34.7$ s aufgrund seiner prägnanteren Wiedergabe der wesentlichen Merkmale des Strömungsfeldes verwendet. In Abbildung 4.35a ist gut die endgültige Ausprägung der Überfallkurve zu sehen, welche auf der Oberseite die Topologie einer Fallparabel hat und deren Unterseite wie auch im hoch-

eingestautem Zustand auf Ablöse- und Überfallwirbel aufliegt. Die Wasserpartikel werden ab Überströmen des Schützkopfes mit zunehmender Bahnlänge im Überfallstrahl beschleunigt und erreichen ihre größte Geschwindigkeit beim Übergang vom Schützblech auf den Gerinneboden. Dort wird der Strahl beim Auftreffen auf die langsamere Grundströmung nach oben hin abgelenkt und es kommt zu Wirbelbildungen, die beim Abströmen ins Unterwasser anwachsen und so den hinteren Wechselsprungbereich mit nachgelagerten Oberflächenwellen bilden. Deutlich zu erkennen ist auch die nicht stetige Zunahme der Strömungsgeschwindigkeit im Strahl, welche aus der Beeinflussung der Strahldicke durch die sich überschlagenden Wellenfronten im Wechselsprungbereich herrührt. Beim Auftreffen von sich überschlagenden Wellen auf den Strahl wird dieser zusammengedrückt, so dass die Querschnittsverjüngung zu einer Geschwindigkeitszunahme führt. Nachdem die aufschlagende Wellenfront mit dem Strahl verschmolzen ist, liegt ein größerer Strahlquerschnitt vor und die Strömungsgeschwindigkeit reduziert sich wieder. Infolge des sich so wiederholenden Wechselspiels liegt im Strahlquerschnitt eine zeitlich schwankende Strömungsgeschwindigkeit vor, deren impulsartiges Verhalten maßgeblich zur Wirbelbildung mit nachfolgender Abwanderung ins Unterwasser führt. Wie bereits auch bei der hocheingestauten Variante des unvollkommenen Überfalls sind die Grenzschichten am oberen Schützkopf sowie am Schützblech in Abbildung 4.35b als Bereiche mit der ausgeprägtesten Wirbelbildung auszumachen. Hierbei sammeln sich die am Schützkopf bildenden Wirbel überwiegend im Überfallwirbel, während die Wirbel aus dem Grenzschichtbereich des Schützblechs am seinem Ende Ablösen und die Zentren der ablösenden Wirbel im Unterwasser bilden. Für das Druckfeld gilt auch weiterhin, dass die infolge der Wirbelbildung teils deutlich ausgeprägten Abweichungen vom hydrostatischen Druckstand (Abbildung 4.35d) sich nur geringfügig im resultierenden absoluten Druckfeld (Abbildung 4.35c) als kleine Schwankungen im Isobarenfeld wiederfinden.

Zustand 5: Vollkommener Überfall. Im Übergang zum stationären Zustand sinkt der Unterwasserspiegel bis auf das Niveau der Ausflussöffnung ab und der Wechselsprung zieht sich vom Überfall zurück, so dass zwischen dem Auftreffpunkt des Überfallstrahles und dem Wechselsprung ein Bereich mit schießendem Fließzustand vorliegt. Damit findet keine Beeinflussung des Strahles durch den Wechselsprungbereich mehr statt. Dennoch pendelt der Überfallstrahl an seinem Auftreffpunkt leicht hin und her, was zu Geschwindigkeitsfluktuationen im Strömungsquerschnitt des Überfallstrahls führt, welche deutlich in Abbildung 4.36a sichtbar sind. Nach Auftreffen des Überfallstrahles auf das Schützblech folgt der Strahl diesem in schießendem Zustand und wird im Vergleich zum Zustand 4 erst deutlich später durch die langsamere Grundströmung des Unterwassers nach oben hin abgelenkt, wobei es jedoch ebenfalls zur Wirbelbildung kommt. Die Wirbelbildung findet wie in Abbildung 4.36b dargestellt analog zum tiefeingestauten Zustand am Schützkopf und im Grenzschichtbereich des Schützblechs mit Beginn des Überfallwirbels statt. Nach Ablösen der Wirbel am Ende des Schützblechs wandern diese mit der Hauptströmung stromabwärts und stellen die Wirbelzentren dar. Ebenfalls in Übereinstimmung mit dem tiefeingestauten Zustand sind die Wirbel im dynamischen Schwankungsanteil des Druckfeldes deutlich erkennbar (Abbildung 4.36d), jedoch betragsmäßig nicht groß genug, um die hydrostatische Druckverteilung im absoluten Druck (Abbildung 4.36c) maßgeblich zu stören. Die im rückgestauten Zustand eingeschlossene Luftblase verbleibt im ruhenden Grenzbereich zwischen Abreiß- und Überfallwirbel.

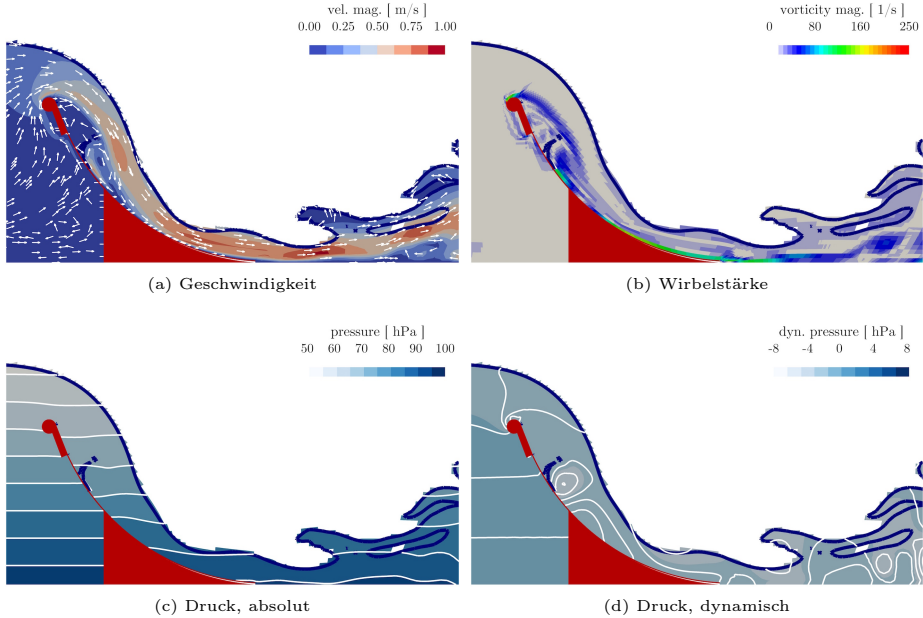


Abb. 4.36: Strömungsfeld; vollkommener Überfall (Zustand 5, $t = 48.9$ s)

Druckverlauf am Schütz. Am Überfall wirkt das Druckfeld der Strömung auf die Schützoberfläche. In Abbildung 4.37 sind sowohl der Verlauf des absoluten Druckes p entlang des Überfallrückens als auch der hydrodynamische Druckanteil $p_{\text{dyn}} = p - p_{\text{stat}}$ zusammengestellt, der die Abweichung vom hydrostatischen Druckzustand angibt. In beiden Abbildungen stellt der hellblau hinterlegte Bereich den Wertebereich sämtlicher Strömungszustände dar, über den exemplarisch die Verlaufskurven der Zustände 1 (Oberflächenwellen), 4 (tiefeingestauter Überfall) und 5 (vollkommener Überfall) gelegt sind. Zur besseren Veranschaulichung ist ebenfalls mit zugehöriger rechtsliegender Ordinate die Kurvengeometrie des Schützrückens gestrichelt eingezeichnet. Das bereits in den Abbildungen 4.32 – 4.36 zu beobachtende Verharren des (absoluten) Druckfeldes in einem vorwiegend hydrostatischen Zustand, lässt sich auch in Abbildung 4.37a anhand der nur sehr geringen Bandbreite des grau hinterlegten Wertebereichs sämtlicher auftretender Zustände wiederfinden. Die für die ausgewählten Zustände 1, 4 und 5 vorliegenden Verlaufskurven zeigen nur geringe Abweichungen voneinander. Lediglich für den vollkommenen Überfall (Zustand 5) lässt sich die insgesamt stattgefundene Druckniveauabsenkung beobachten, die sich aus den hohen, vom Unterwasser ungestörten Strömungsgeschwindigkeiten auf dem Überfallrückens ergibt. Zusätzlich führt auch der Einfluss des Überfallwirbels im oberen Drittel des Schützblechs im Bereich $x = 13.8$ m zu einer kleinen, lokal begrenzten, aber sichtbaren Absenkung des absoluten Druckes. Betrachtet man daneben den hydrodynamischen Druckanteil p_{dyn} in Abbildung 4.37b, so werden die Strömungsauswirkungen auf das

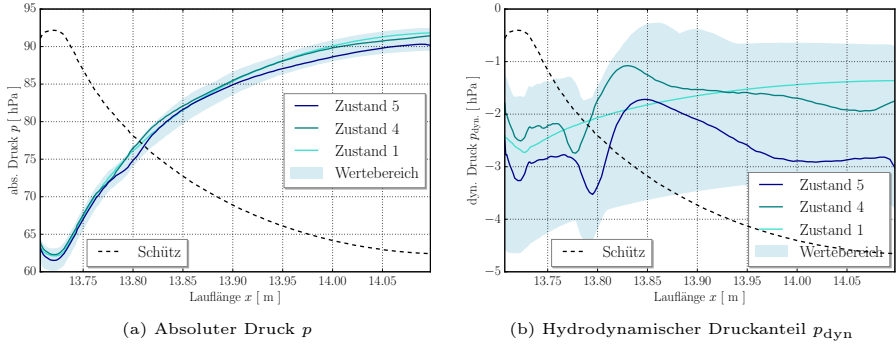


Abb. 4.37: Druckverteilung auf Überfallrücken

Schütz für die unterschiedlichen Zustände deutlich. Im noch relativ ruhigen Strömungsfeld des Zustandes 1, bei dem nur Oberflächenwellen vorhanden sind, sind absolute und dynamische Druckkurven affin zueinander. Die gleichmäßige Strömung über dem Schütz senkt den Druck durchgehend ab, wobei die maximale Verringerung direkt über dem Schützkopf liegt. Mit zunehmender Ausbildung des Überfallstrahles (Zustände 4 und 5) beginnt der Verlauf des dynamischen Druckanteils vom absoluten abzuweichen. Neben der Zunahme der Unterdruckspitze unmittelbar über dem Schützkopf bildet sich der Überfallwirbel im oberen Drittel des Schützbleches aus, auf dessen Unterseite hohe Strömungsgeschwindigkeiten vorherrschen, die zur zweiten Unterdruckspitze im Bereich $x = 13.8\text{ m}$ führen. Anschließend verringert sich die Strömungsgeschwindigkeit wieder und der Druck steigt leicht an, bis zu dem Punkt, an dem der Kernbereich des Überfallstrahls mit seinen hohen Strömungsgeschwindigkeiten auf das Schützblech auftrifft. Von dort an beginnt der Druck wieder abzusinken. Am Ende des Schützes steigt im Zustand 4 der Druck infolge der noch unvollkommenen Überfallsituation mit geringfügigem Rückstau wieder leicht an, während er im Zustand 5 aufgrund der noch fortschreitenden Strömungsbeschleunigung weiter absinkt.

4.3.4 Weitere Fließzustände

Numerische Parameterstudie. Neben dem in Abschnitt 4.3.3 für die Schützstellung OK-30 ausführlich untersuchten Fließzustand mit $Fr_{den} = 0.23$ wurden im Rahmen einer numerischen Parameterstudie für den Wertebereich $0.07 \leq Fr_{den} \leq 0.41$ sowohl die Strömungscharakteristik als auch deren Auswirkung auf den Schützkörper betrachtet. Die Unterscheidung der einzelnen Parametersätze erfolgt anhand der über den Einströmrand definierten densimetrischen FROUDE-Zahl Fr_{den} , die den wechselseitigen Einfluss von Dichtedifferenz beider Fluidphasen und Erdbeschleunigung zusammenfassend berücksichtigt. Das Abschreiten des Wertebereichs der densimetrischen FROUDE-Zahl erfolgt hierbei sowohl durch Veränderung der Luftphasedichte von 910 kg/m^3 bis hinab auf 1 kg/m^3 als auch unter Anpassung der Erdbeschleunigung im Bereich zwischen 10 N/kg und 0.1 N/kg . Dabei geht eine niedrige densimetrische FROUDE-Zahl Fr_{den} am Einströmrand einher mit einer geringen Dichte der Luftphase bei konstanter Erdbeschleunigung. Unverändert bei den einzelnen Berechnungen bleibt hingegen stets die Dichte der Wasserphase bei 1000 kg/m^3 , so dass der Fließzustand $Fr_{den} = 0.07$ demjenigen der experimentellen Untersuchungen entspricht. Im Hinblick auf Rechenzeit und vorhandene Speicherkapazitäten sind die Berechnungen auf einem Netz mit reduzierter Knotenanzahl von 2991 Knoten bei einer Zeitschrittweite von $\Delta t = 0.1 \text{ s}$ durchgeführt. Trotz der verhältnismäßig groben räumlichen und zeitlichen Diskretisierung ist es dennoch möglich, für den gesamten Wertebereich der Parameterstudie Strömungszustände zu berechnen, die mit Bezug zu den experimentell ermittelten Ergebnissen aus Abschnitt 4.2.3 als physikalisch glaubwürdig eingestuft werden können.

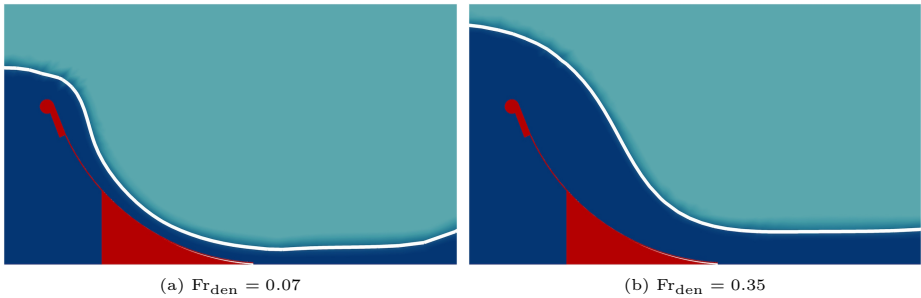


Abb. 4.38: Fluidphasen im stationären Zustand

Überfallkurve und Fließzustand. Exemplarisch ist die Materialverteilung der Fluidphasen mit ihrer zugehörigen Grenzflächenlage im stationären Zustand für die Parametersätze $Fr_{den} = 0.07$ und $Fr_{den} = 0.35$ in Abbildung 4.38 dargestellt. Gut sichtbar ist die unterschiedliche Fülligkeit der Überfallkurve. Für den Parametersatz $Fr_{den} = 0.07$ ergibt sich in Abbildung 4.38a eine nur sehr geringe Dicke des Überfallstrahls, der vorwiegend dem Schützverlauf folgt. Dies steht in Übereinstimmung mit den experimentellen Beobachtungen. Demgegenüber ist der Überfallstrahl beim Parametersatz $Fr_{den} = 0.35$ in Abbildung 4.38b wesentlich fülliger. Die gesamte Variationsbreite der Überfallkurven ist in Abbildung 4.39a anhand ausgewählter

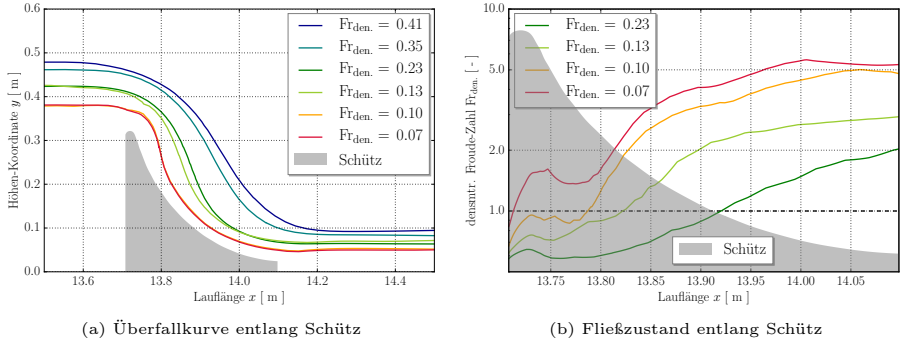


Abb. 4.39: Überfallkurven und Fließzustände

Parametersätze dargestellt. Deutlich erkennbar ist die für Parametersätze mit zunehmender densimetrischen FROUDE-Zahl Fr_{den} ebenfalls zunehmende Fülligkeit der Überfallkurve, wobei die Überfallkurve des im vorausgegangenen Abschnittes ausführlicher untersuchten Parametersatzes $Fr_{den} = 0.23$ im Rahmen dieser Studie im mittleren Variationsbereich liegt. Anhand der Überfallkurve lässt sich die Wassertiefe über dem Schütz ermitteln, so dass der Verlauf der densimetrische FROUDE-Zahl entlang des Überfallrückens unter Verwendung von Gleichung (2.5) berechnet und in Abbildung 4.39b dargestellt werden kann. Hierbei wurde als repräsentative Geschwindigkeit v der Betrag des resultierenden Geschwindigkeitsvektors unmittelbar an der Grenzfläche der beiden Fluidphasen gewählt. Wie am Überfallbauwerk vorgesehen, erfolgt auf dem Schützrückens der Übergang von einem strömenden in einen schießenden Fließzustand. Dabei geschieht dies im Rahmen der Parameterstudie umso früher, je geringer die Dichte der Luftphase ist, was einer niedrigeren densimetrische FROUDE-Zahl Fr_{den} am Einströmrund entspricht.

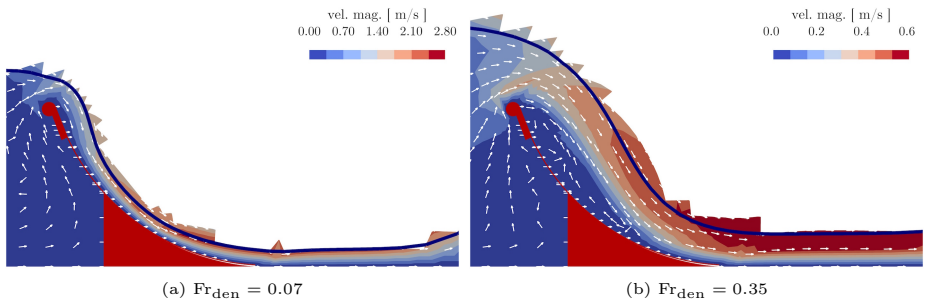


Abb. 4.40: Geschwindigkeitsfelder im stationären Zustand

Strömungsfeld. Für einen genaueren Einblick in das Strömungsgeschehen sind in Abbildung 4.40 die Geschwindigkeitsfelder für die bereits mit ihren Fluidphasen näher betrachteten Parametersätze $Fr_{den} = 0.07$ und $Fr_{den} = 0.35$ dargestellt. Für den sehr dünnen Überfallstrahl bei $Fr_{den} = 0.07$ ist in Abbildung 4.40a zu erkennen, dass das Geschwindigkeitsfeld sowohl verglichen mit demjenigen des Parametersatzes $Fr_{den} = 0.23$ (vgl. Abbildung 4.36a) als auch demjenigen des Parametersatzes $Fr_{den} = 0.35$ betragsmäßig die höchsten Werte aufweist. Des Weiteren bildet sich bei dieser Strahltopologie nur ein sehr kleiner Abreißwirbel, jedoch kein Überfallwirbel aus. Hingegen verringern sich die Strömungsgeschwindigkeiten im Überfallstrahl bei den Parametersätzen mit höheren densimetrischen FROUDE-Zahlen am Einstromrand, wie in Abbildung 4.40b zu erkennen ist. Daneben bilden sich wie bereits in Abschnitt 4.3.3 beobachtet Überfall- und Abreißwirbel im fülligeren Überfallstrahl aus. Ebenso

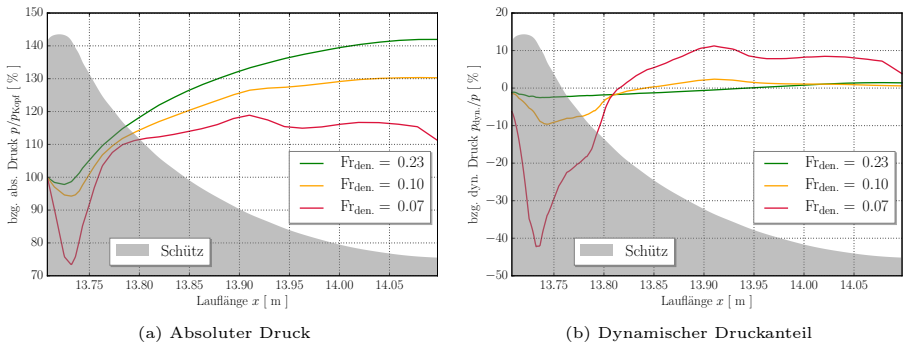


Abb. 4.41: Druckverläufe am Schütz

wie das Geschwindigkeitsfeld ist auch der Druckverlauf am Schütz abhängig vom zugrundeliegenden Parametersatz. In Abbildung 4.41 sind für ausgewählte Parametersätze sowohl der Verlauf des absoluten Druckes als auch sein hydrodynamischer Anteil dargestellt. Dabei wurde der absolute Druckverlauf eines Parametersatzes in Abbildung 4.41a jeweils auf das Druckniveau p_{Kopf} an der Vorderseite des Schützkopfes normiert, während in Abbildung 4.41b der hydrodynamische Druckanteil jeweils auf den absoluten Druckwert am selben Ort bezogen ist. Insgesamt lässt sich so beobachten, dass bei Parametersätzen mit kleineren densimetrischen FROUDE-Zahlen aufgrund der vorliegenden Strömungscharakteristik der hydrodynamische Druckanteil einen größeren Einfluss auf das absolute Druckniveau hat und zu einem stärkeren Absinken des absoluten Druckes über dem Schützkopf führt. Der Übergang des hydrodynamischen Druckanteils in den positiven Bereich ist hingegen physikalisch nicht plausibel und ist im Vergleich mit Abschnitt 4.3.3 auf eine nicht ausreichende Auflösung des Druckfeldes infolge der nur sehr groben räumlichen Vernetzung zurückzuführen.

Schützstellung OK-50. Neben der Variation der Materialparameter der Luftphase sowie der Erdbeschleunigung hat auch die Schützstellung selbst Einfluss auf das Strömungsgeschehen. Im Hinblick auf den in Abschnitt 4.1.2 beschriebenen Initialisierungs- und Rückkopp-

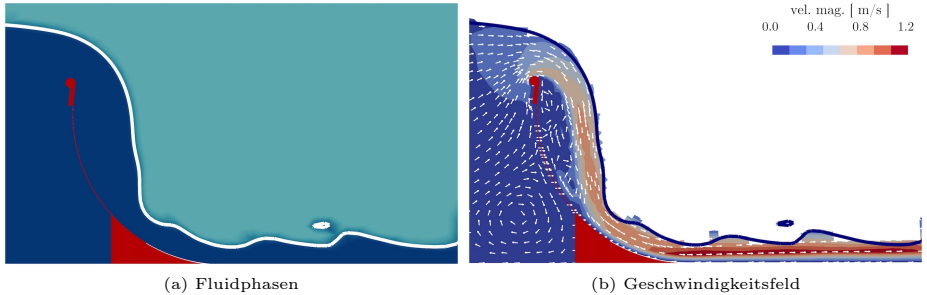


Abb. 4.42: Schützstellung OK-50

lungsmechanismus bei Strahl- und Wehrschwingungen ist die in Abbildung 4.42 dargestellte Schützstellung mit einer Schützkopfhöhe von 50 cm (Schützstellung OK-50) numerisch näher untersucht worden. Der Berechnung liegen dieselben Materialparameter wie in Abschnitt 4.3.3 zugrunde, jedoch weiterhin mit reduzierter Knotenanzahl und Zeitschrittweite. Für den stationären Zustand konnte in der numerischen Berechnung ein Pendeln der Außenseite des Überfallstrahles ausgehend vom Auftreffpunkt beobachtet werden, das auch ohne eine Hinterlüftung auftritt. Das Pendeln der Strahlaufseite ist in Abbildung 4.42a im unteren Strahlbereich zu erkennen und bewirkt die wellige Oberfläche des Unterwasserspiegels. Das Strahlpendeln entsteht über die Mitnahme von Luftpartikeln an der Grenzfläche des Überfallstrahles, die beim Auftreffen des Strahles auf das Unterwasser Luftwirbel bilden und dort so zu Fluktuationen der Strahldicke führen. Im Geschwindigkeitsfeld wird dabei sichtbar, dass die Pendelbewegungen des Überfallstrahles sich im Überfallwirbel auswirken und als Geschwindigkeitsfluktuationen entlang des Schützbleches zum Schützkopf hinauf ausbreiten. Dort werden sie als Wirbel wieder stromabwärts transportiert und halten die Pendelbewegung dadurch aufrecht. Damit kann beobachtet werden, dass die in Abschnitt 4.1.2 besprochene Regelungs- und Verstärkungseigenschaft des Luftpolsters bei fehlender Hinterlüftung vom Überfallwirbel übernommen wird. Des Weiteren ist im zugehörigen Geschwindigkeitsfeld in Abbildung 4.42b die Aufspaltung des Überfallstrahles in seinen Kernbereich und den sehr großen Überfallwirbel sichtbar. Im Kernbereich, der der Topologie eines Freistrahls folgt, sind die Pendelbewegungen als Geschwindigkeitsfluktuationen wiederfindbar. Daneben belegt der Überfallwirbel das Gebiet, das bei einem zur Hinterlüftung führenden Luftdurchtritt durch den Strahl zum Luftpolster wird. Aus den Untersuchungen in Abschnitt 4.3.3 konnte beobachtet werden, dass der Luftdurchtritt nicht nur wie in Abschnitt 4.2.3 beschrieben über die Seiten erfolgen kann. Stattdessen können Luftblasen über die Interaktion von Wechselsprung und Strahl bis auf den Boden des Schützbleches bewegt werden, wo diese abhängig vom Auftreffpunkt über den Überfallwirbel auf die Strahlrückseite transportiert werden und dort beginnen diesen zu hinterlüften. Zur numerischen Beobachtung dieses Effektes ist jedoch mindestens eine räumliche und zeitliche Auflösung wie in Abschnitt 4.3.3 notwendig.

4.3.5 Zusammenfassung

Für alle Strömungszustände konnte beobachtet werden, dass das Wirbelfeld sich vorwiegend vom Schützkopf her ausbildet und durch die Strömung in das Unterwasser transportiert wird. Dort entstehen die davon ausgehenden Wirbelstrukturen, die dann als Oberflächenwellen sichtbar werden. Die für die Schützstellung OK-30 mit dem Parametersatz $Fr_{den} = 0.23$ beobachteten Strömungszustände mit hoch- und tiefeingestautem unvollkommenen sowie vollkommenen Überfall konnten zeigen, dass sich das hinter dem Kernbereich des Überfallstrahls liegende Wirbelgebiet in einen unmittelbar am Schützkopf befindenden kleinen Abreiß- und einen davon unterhalb am Schützblech liegenden Überfallwirbel unterteilt. Darüber hinaus konnte für den hocheingestauten Überfallzustand bei der Interaktion von Überfallstrahl und Wirbelwalze ergänzend zu den experimentellen Untersuchungen beobachtet werden, dass ein Lufttransport zum Schützblech und damit hinter den Überfallstrahl nicht ausschließlich seitlich geschehen muss, sondern auch durch den Strahl hindurch erfolgen kann. Abhängig vom Auftreffpunkt des Strahles werden die hinter den Strahl gelangten Luftblasen entweder stromabwärts transportiert oder durch den Überfallwirbel am Schützblech entlang in Richtung Schützkopf stromaufwärts bewegt, wodurch sich ein Luftpolster hinter dem Überfallstrahl auszubilden beginnt. Nach Überströmen des Schützes taucht der Strahl in den Wechselsprungbereich des Unterwassers ein, in der es zu einer starken Vermischung von Wasser- und Luftphase mit sich überschlagenden Wellenfronten und Lufteinschlüssen kommt. Zur Abbildung der in diesem Gebiet vorliegenden komplexen Strömungscharakteristik ist eine angepasste und zueinander abgestimmte räumliche und zeitliche Diskretisierung wesentlich, ohne die sowohl die Interaktion zwischen den Fluidphasen als auch zwischen Überfallstrahl und Wechselsprungbereich nicht wiedergegeben werden kann. Daneben lässt sich die Auswirkung der Strömung auf das Schütz im hydrodynamischen Druckanteil p_{dyn} des vorwiegend hydrostatisch geprägten Druckfeldes beobachten. Sowohl im unvollkommenen als auch vollkommenen Überfallzustand kommt es unmittelbar über dem Schützkopf sowie im Überfallwirbelbereich zu einer signifikanten Druckabsenkung aufgrund der dort vorherrschenden hohen Strömungsgeschwindigkeiten.

Anhand der durchgeführten Parameterstudie mit den über die densimetrische FROUDE-Zahl am Einströmrand zusammenfassend beschriebenen Parameterkonfigurationen $0.07 \leq Fr_{den} \leq 0.41$ konnte der Zusammenhang zwischen der Gestalt und Fülligkeit der Überfallkurve und der Ausbildung und Verteilung von Abreiß- und Überfallwirbel im Totwasserbereich des Überfallstrahls beobachtet werden. Bei einem nur sehr schwachen Überfallstrahl kommt es nur zur Ausbildung eines sehr kleinen Abreißwirbels, es entsteht jedoch kein Überfallwirbel. Dieser benötigt mehr Raum und tritt somit erst bei einer größeren Fülligkeit auf. Ebenfalls wird mit zunehmender Fülligkeit des Überfallstrahls die Tendenz des Strahlkerngebietes zur Freistrahltopologie sichtbar. Demgegenüber tritt der Wechsel vom unter- in den überkritischen Fließzustand mit abnehmender Strahldicke früher beim Überströmen des Schützes ein und es werden beim Verlassen des Schützbereichs höhere densimetrische FROUDE-Zahlen erreicht.

Ergänzend zu den numerischen Untersuchungen mit einer Schützoberkante von $y = 30$ cm konnte bei der Schützstellung OK-50 ein Pendeln des nicht hinterlüfteten Überfallstrahls beobachtet werden. Hierbei geht die Pendelbewegung zwar, wie in Abschnitt 4.1.2 beschrieben, von der Eintauchstelle des Strahles im Unterwasser aus, an der die mit der Grenzschicht mitgerissenen Luftpartikel Wirbel hervorrufen, jedoch wird sie auch ohne Luftpolster auf-

rechterhalten. Die Regulierungs- und Verstärkungsfunktion des Luftpolsters nimmt hierbei der Überfallwirbel im Totwasserbereich ein. In ihm werden die durch die Pendelbewegung an der Eintauchstelle entstandenen Wirbel am Schützblech entlang stromaufwärts transportiert und wandern von dort mit dem Überfallstrahl und verstärkt durch die Erdbeschleunigung vergrößert wieder hinab. Dadurch werden die Pendelbewegungen im unteren Strahlbereich und die daraus resultierenden Geschwindigkeitsfluktuationen im Kernbereich des Strahles aufrecht-erhalten.

Zusammenfassend konnten damit insgesamt die in Abschnitt 4.2 experimentell gemachten Beobachtungen durch die in den Abschnitten 4.3.3 und 4.3.4 durchgeführten numerischen Untersuchungen ergänzt und vertieft werden. Als wesentlich sind besonders das beobachtete Interaktionsverhalten von Überfallstrahl und Unterwasser im Wechselsprungbereich mit der starken Vermischung beider Fluidphasen zu nennen sowie auch der Rückkopplungs- und Verstärkungsmechanismus des Überfallwirbel beim nicht hinterlüfteten Strahlpendeln. Jedoch ist zu berücksichtigen, dass zur Abbildung eines realen Strömungsverhaltens stets sowohl räumliche und zeitliche Diskretisierung auf die physikalischen Parameter abzustimmen sind als auch ist die Wahl der Rand- und Anfangsbedingungen geeignet auf das von seiner Umgebung freigeschnittene Berechnungsgebiet anzupassen.

5 Schaufelwasserrad

Im Zuge des Ausbaus der erneuerbaren Energien gewinnt auch die Nutzung der Wasserkraft an Bedeutung. Gegenüber Photovoltaik und Windkraft hat die Wasserkraft den Vorteil deutlich planbarer und kontinuierlicher zur Verfügung zu stehen und damit auch grundlastfähig und netzstabilisierend zu wirken. Bei der Wasserkraft kann unterschieden werden in die Nutzung von Meereswasserkraft und Flusswasserkraft. Während bei der Meereswasserkraft sowohl die Energie der Unterwasserströmungen als auch die Energie in den Oberflächenwellen genutzt wird, kommt bei der Flusswasserkraft, die auch als Laufwasserkraft bezeichnet wird, vorwiegend die Nutzung des Höhenunterschiedes zwischen Ober- und Unterwasser zum Tragen.

Die Laufwasserkraft bei Flachlandflüssen ist gekennzeichnet durch vorwiegend kleine bis mittlere Fallhöhen bei großen, aber im Jahresverlauf teils stark schwankenden, Durchflussmengen. Für die Nutzung der Wasserkraft hat sich auch im Bereich der Laufwasserkraft die Turbinentechnologie für einen breiten Anwendungsbereich aufgrund der seit mehr als 100 Jahren erfolgten technischen Optimierung entwickelt, die von umfangreichen theoretischen und experimentellen Untersuchungen begleitet wurde. Jedoch besteht im Bereich der niederen Fallhöhen bei Turbinen die Schwierigkeit, aufgrund der geringen hydraulischen Pressung die Wasserkraft entweder technisch oder wirtschaftlich nicht nutzen zu können. Auch die bei Flüssen im Jahresverlauf teils stark schwankende Durchflussmenge bereitet der heute verfügbaren Turbinentechnologie im Hinblick auf den Wirkungsgradverlauf erhebliche Schwierigkeiten, da der maximale Wirkungsgrad bei Turbinen lediglich in einem kleinen Bereich um den Betriebspunkt vorliegt und abseits davon spürbar absinkt.

Untersuchungen der letzten Jahre haben gezeigt, dass sich zur Erschließung des bisher nicht genutzten Wasserkraftpotentials im Bereich der niederen Fallhöhen die Wasserradtechnologie sehr gut eignet. Vorteilhaft bei Wasserrädern ist die Nutzung der potentiellen Energie der Laufwasserkraft auch bei geringen Fallhöhen mit einem plateauartigen Wirkungsgradverlauf über fast den gesamten Arbeitsbereich, der sich bei guter konstruktiver Ausführung auch im Bereich derjenigen Wirkungsgrade von Turbinen befindet. Anhand des sich damit ergebenden großen Jahresarbeitsvermögens gelingt eine Jahresstromproduktion, die mit der Turbinentechnologie an denselben Standorten nicht erzielbar wäre.

Jedoch ist für die Verarbeitung großer Durchflussmengen eine Weiterentwicklung der konventionellen Wasserradtechnologie notwendig. Die dadurch entstandene Konzeption von Hochleistungswasserrädern der Weiterentwickelten Wasserradtechnologie ist ausgerichtet auf die Verarbeitung von Durchflussmengen bis zu $100 \text{ m}^3/\text{s}$ und Leistungen von bis zu 3 MW, wobei deutlich höhere Kräfte, Biege- und Torsionsmomente von der Konstruktion aufzunehmen sind, als dies bei konventionellen Wasserrädern bisher der Fall war. Ausgehend von historischer Literatur und noch vorhandenen Wasserradkonstruktionen wurde die konventionelle Wasserrad-

technologie sowohl mechanisch und hydraulisch als auch konstruktiv verbessert und teilweise neu entwickelt. Dazu wurden fast ausschließlich geometrisch-analytische und experimentelle Betrachtungen durchgeführt.

Im Rahmen dieser Arbeit erfolgt die begleitende Betrachtung des das Wasserrad umgebenden Strömungsfeldes mit Hilfe numerischer Untersuchungen, da dieses für die Energie- und Kraftübertragung der Strömung auf die Konstruktion den maßgebenden Einfluss hat. Aufgrund des approximativen Charakters numerischer Lösungen sind begleitende experimentelle Untersuchungen zur Validierung ebenfalls durchgeführt worden. Numerische Lösungen bieten die Möglichkeit, für jeden Punkt des Strömungsfeldes Zustandsgrößen ermitteln zu können, wodurch es erstmalig möglich ist, für den nur schwer zugänglichen Bereich der Schaufelzwischenräume im Zusammenhang mit Spalt- und Kropfbereich detaillierte Betrachtungen des Strömungsfeldes in der unmittelbaren Umgebung des Wasserrades durchführen zu können. Die Güte der numerischen Lösung wird dabei stets hinterfragt und mit den vorliegenden theoretischen und experimentellen Daten in Zusammenhang gesetzt.

In Abschnitt 5.1 erfolgt nach der Zusammenstellung der theoretischen Grundlagen der Wasserkraftnutzung und der mit ihr einhergehenden Entwicklung der Wasserräder sowie ihrer Abgrenzung zur Turbinentechnologie die Darlegung der Entwicklungsziele der Weiterentwickelten Wasserradtechnologie und der aus ihr hervorgegangenen Hochleistungswasserräder. Abgeschlossen wird der theoretische Grundlagenteil mit der Diskussion des Strömungsverhaltens im Schaufelwasserrad sowie der damit verbundenen Wirkungsgradeinflüsse. An ihn schließt sich in Abschnitt 5.2 die Diskussion des durchgeführten experimentellen Begleitprogramms an, das neben einer Ergänzung und Vertiefung der aus der Literatur vorhandenen Daten auch den numerischen Berechnungen als Referenz dient. Abschließend erfolgt in Abschnitt 5.3 die numerische Untersuchung der Durchströmung am Wasserradmodell SWR-8, das auch für die experimentellen Untersuchungen verwendet wurde. Ausführlich werden die Strömungsverhältnisse im Ein- und Austrittsbereich für den Betriebszustand untersucht.

5.1 Wasserradtechnologie

5.1.1 Technische Entwicklung

Wasserkraft. Der Nutzung der Wasserkraft kommt sowohl historisch im Hinblick auf die kulturgeschichtliche Entwicklung der Menschheit als auch gegenwärtig unter Berücksichtigung der zunehmenden Nutzung regenerativer Energien eine besondere Bedeutung zu. Gegenüber der Solar- und Windenergie hat die Wasserkraft den Vorteil, deutlich planbarer und kontinuierlicher zur Verfügung zu stehen, so dass sie sowohl grund- als auch spitzenlastfähig ist und keinen bzw. nur einen sehr geringen Bedarf an Regelleistung hat. Auch liegen die Energieerzeugungskosten der Wasserkraft insgesamt niedrig und deutlich unterhalb derjenigen von Solarenergie [Jen09].

Die Wasserkraft selbst kann im Wesentlichen in Meeres- und Flusswasserkraft unterteilt werden. Während die in den Meeren gespeicherte Strömungsenergie vorwiegend durch Nutzung der gezeitenabhängigen Unterwasserströmungen oder der Bewegung der Meeresoberfläche geschieht, erfolgt die Nutzung der Laufwasserkraft an Staustufen heutzutage fast ausschließlich durch Turbinen. Eine alleinige Nutzung der Strömungsenergie ohne gleichzeitige Umwandlung der potentiellen in kinetische Energie kommt dabei in der Regel nur bei Kleinwasserkraftwerken im Bereich bis 100 kW zum Tragen. Ansonsten wird die durch den Aufstau lokal vorliegende potentielle Energie stets vor oder beim Eintritt in die Turbine vollständig in kinetische und schlussendlich in elektrische Energie umgesetzt.

Historische Entwicklung. Infolge des Sesshaftwerdens der Menschheit im 5. Jahrtausend v. Chr. ergab sich die Notwendigkeit, Wasser zu den Siedlungen zu bringen, welche in der Regel oberhalb oder leicht erhöht von Flüssen lagen. Dafür ist bereits um 3000 v. Chr. die Verwendung eines Schöpfwerkes in Mesopotamien belegt, welches von einem sich in der Flusströmung befindenden Stoßrad angetrieben wurde [Gie09]. VITRUV berichtet für um das Jahr 20 v. Chr. auch von Mühlsteinen, deren Antrieb mittels Wasserrädern realisiert war. Im Mittelalter erfolgte neben dem Einsatz von Wasserrädern in Ufer-, Brücken- und Schiffsmühlen verstärkt der Bau von stationären Mühlenbauten, denen das Wasser mittels Kanälen gezielt und regelbar zugeführt werden konnte. Damit wurden dann nicht mehr nur Mühlsteine, sondern auch vermehrt andere Arbeitsgeräte des Handwerks wie z.B. Sägen und Hämmer angetrieben. Auch erfolgte die Belüftung und Entwässerung von Bergwerken wie z.B. im Harz und im Erzgebirge mit Hilfe von Wasserrädern als Antriebsmaschinen [Bal99].

Wasserradtypen. Der umfangreiche und vielfältige Einsatz der Wasserräder seit der Antike führte zur Ausdifferenzierung in die drei Haupttypen der unter-, mittel- und überschlächtigen Wasserräder. Dabei geschieht die Unterteilung nach Art der Beaufschlagung der Schaufeln durch das eintretende Wasser. Gemeinsam ist allen drei Typen, dass im Wesentlichen die potentielle Energie der Strömung durch Abbau des Höhenunterschiedes vom Ober- ins Unterwasser genutzt wird. Während bei überschlächtigen Wasserrädern (Abbildung 5.1) ausschließlich die Gewichtskraft des Wassers zum Antrieb des Rades führt, nimmt der Beitrag der zusätzlich umgesetzten kinetischen Energie mit sinkender Wasserspiegellagedifferenz vom mittelschläch-

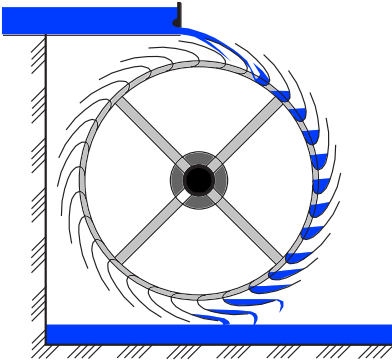


Abb. 5.1: Oberschlächtiges Wasserrad
(nach [Nue05])

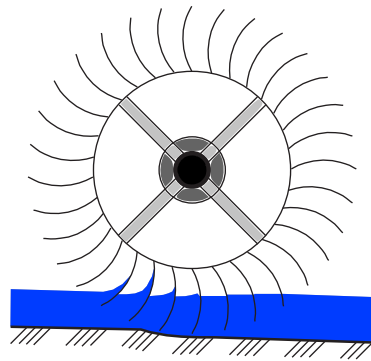


Abb. 5.2: Unterschlächtiges Wasserrad
(nach [Nue05])

tigen Wasserrad (Abbildung 5.3) über das tiefschlächte Wasserrad (Abbildung 5.4) bis hin zum unterschlächtigen Wasserrad (Abbildung 5.2) zu, bis es beim Stoßrad dessen alleinige Antriebsquelle ausmacht.

Unterschlächtige Wasserräder. Historisch zuerst ist das Auftreten der unterschlächtigen Wasserräder in ihrer Variante als Stoßräder belegt, welche in die Wasserströmung eingetaucht werden und so vorwiegend die kinetische Energie des Wassers über den Stoß auf die Schaufel umsetzen. Zusätzlich zur kinetischen Energie können unterschlächtige Wasserräder darüber hinaus noch einen kleinen Teil der potentiellen Energie aus den sehr geringen Höhendifferenzen der Wasserspiegellagen von Ober- und Unterwasser umsetzen. Dabei verarbeiten sie Durchflüsse bis ca. $3.0 \text{ m}^3/\text{s}$ bei Fallhöhen zwischen 0.5 m bis 2.5 m und erzielen dabei Wirkungsgrade von maximal 65% [Gie09], während reine Stoßrädern nur Wirkungsgrade von bis zu 35% erreichen [Qua24]. Eine Verbesserung des Wirkungsgrades kann durch Anordnung eines Spanschrützes wie beim PONCELET-Wasserrad gelingen, wodurch der Strahl des beaufschlagenden Wassers konzentriert wird. In der Regel liegen sowohl bei Stoßrädern als auch bei unterschlächtigen Wasserrädern erfahrungsbedingt die Umdrehungsgeschwindigkeiten bei der Hälfte der Strömungsgeschwindigkeit des vorbeifließenden Wassers [Qua24].

Oberschlächte Wasserräder. Oberschlächte Wasserräder, bei denen die Beaufschlagung der Zellen in der Nähe des Scheitels erfolgt, weisen ebenfalls eine lange Nutzungsgeschichte auf. Sie nutzen ausschließlich die potentielle Energie durch Umsetzung der Gewichtskraft des Wassers in die Drehbewegung des Rades. Um eine vollständige Energieübertragung zu erreichen, muss der in den Radzellen zurückgelegte Weg möglichst lang sein. Daher sollte die Befüllung der Zellen im Scheitelpunkt möglichst nah am oberseitigen Ausfluss erfolgen und sich die Entleerung erst spät im unteren Scheitelpunkt vollziehen. Dies wird erreicht durch Anpassung der Schaufelform an die relative Bahnkurve des eintretenden Wasserstrahls unter Berücksichtigung von Strahl- und Umfangsgeschwindigkeit. Oberschlächte Wasserräder

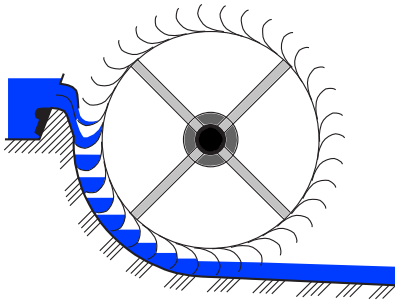


Abb. 5.3: Mittelschlächtiges Wasserrad mit Kulisseneinlauf (nach [Nue05])

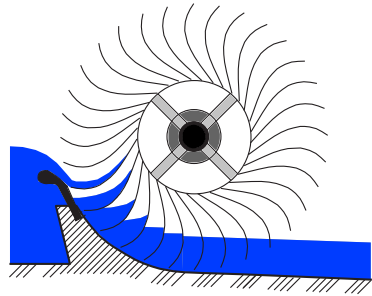


Abb. 5.4: Wasserrad ZUPPINGER Bauart (nach [Nue05])

können Fallhöhen von 4 m bis zu 10 m bei nur geringen Durchflüssen von bis zu $0.8 \text{ m}^3/\text{s}$ nutzen [Qua24], wobei sich die Fallhöhe direkt auf den Raddurchmesser auswirkt. Dabei werden durchweg konstant hohe Wirkungsgrade von ca. 85 % erreicht [Gie09].

Mittelschlächtinge Wasserräder. Tritt das Wasser nahezu auf Höhe der Drehachse ein, so spricht man von mittelschlächtigen Wasserrädern (Abbildung 5.3). Wie bei den überschlächtigen Wasserrädern wirkt das Wasser durch seine Gewichtskraft, wodurch die potentielle Energie der Strömung direkt umgesetzt wird. Der Einlauf des Wassers in das Rad erfolgt über ein Überfallschütz oder einen Kulisseneinlauf, welcher zusätzlich den Impuls des auf die Schaufel auftreffenden Strahles nutzbar macht. Die Ausbildung der in der Regel gekrümmten Schaufelform erfolgt im Hinblick auf einen stoß- und rückschlagsfreien Eintritt des Wassers sowie mit dem Ziel wie auch beim überschlächtigen Wasserrad das Wasser möglichst bis zum unteren Scheitelpunkt im Rad zu halten. Im unteren Bereich wird das Rad vom sogenannten Kropf umgeben, der die offenen Schaufelzwischenräume nach unten hin abschließt und so ein zu frühes Entleeren verhindert. Mit mittelschlächtigen Wasserrädern können Fallhöhen von 1.5 m bis 5.0 m bei Durchflüssen von $0.2 \text{ m}^3/\text{s}$ bis $2.0 \text{ m}^3/\text{s}$ genutzt werden. Die Wirkungsgrade können ebenfalls 85 % erreichen [Qua24].

Wasserräder nach Zuppinger Bauart. Erfolgt die Beaufschlagung unterhalb der Radmitte, so handelt es sich um tiefschlächtinge Wasserräder, die eine Untergruppe der mittelschlächtigen Wasserräder bilden und auch als Niedergefällewasserräder bezeichnet werden. Zu diesen zählen als wesentlicher Vertreter die Wasserräder nach ZUPPINGER Bauart (Abbildung 5.4), benannt nach dem Schweizer WALTER ZUPPINGER (1814 - 1889), welche den Übergang von mittel- zu unterschlächtigen Wasserrädern bilden. Sie haben sich für den Bereich der niederen Fallhöhen zwischen 0.6 m – 4 m durchgesetzt und sind in der Lage Durchflussmengen von $0.3 \text{ m}^3/\text{s}$ – $5 \text{ m}^3/\text{s}$ bei einer Leistungsabgabe von bis zu 50 kW und Wirkungsgraden von bis 85 % zu verarbeiten [Nue05]. Dies erfolgt in der Regel bei langsamen Drehzahlen zwischen 5 U/min – 8 U/min. Neben der vorwiegenden Nutzung der potentiellen Energie sind Wasserräder nach ZUPPINGER Bauart auch in der Lage einen Teil der kinetischen Energie der Strömung

umzusetzen, was optisch deutlich durch Herauflaufen des eintretenden Wasserstrahls an der Schaufeloberfläche sichtbar ist. Nach dem Herauflaufen kommt das eintretende Wasser in den Schaufelzwischenräumen zur Ruhe und bewegt sich mit der Umfangsgeschwindigkeit des Rades in Richtung Unterwasser. Die Ausbildung der Schaufelform ist gekrümmt und folgt der logarithmischen Spirale einer Schneckenlinie. In guter Näherung bei nur geringen Verlusten ist auch die Kombination von Gerade und Kreisbogen als Profillinie verwendbar. Im Zusammenhang mit der Ausbildung des Überfallschützes am Einlauf des Wasserstrahls in die Schaufelzwischenräume ermöglicht eine gute Schaufelform einen möglichst stoß- und rückschlagfreien Eintritt des Wasserstrahls. Darüber hinaus ergibt sich so auch ein wirbelfreies Austauschen der Schaufel aus dem Unterwasser, sofern die Einbauhöhe des Rades mit der Lage des Unterwasserspiegels korrekt abgestimmt ist. Ebenfalls wird zur Verhinderung eines frühzeitigen Entleerens der Schaufelräume ein Kropfgerinne mit möglichst geringem Spalt angeordnet.

Stand der Technik. Allen Wasserradtypen gemein ist ihre Robustheit im Hinblick auf eine einfache Wartung und ihre weitestgehende Unempfindlichkeit gegenüber Treibgut und Geschiebe sowie den geringen Investitionsaufwendungen infolge der einfachen Bauweise [Gie09], [Jen09]. Die technische Entwicklung der konventionellen Wasserradtechnologie für den Bereich der Kleinwasserkraft mit Fallhöhen bis maximal 12 m bei nur geringen Durchflüssen von bis zu $5 \text{ m}^3/\text{s}$ kann seit Anfang des 20. Jahrhunderts als ausgereift angesehen werden. Ende des 19. Jahrhunderts erfolgte die Zusammenstellung des damaligen und auch heute noch gültigen Wissens durch BACH [Bac86] und MÜLLER [Mül99a, Mül99b, Mül99c] und fand seinen Abschluss in der Arbeit von MÜLLER [Mül39], welche bis heute noch die Grundlage für alle Neuauslegungen von Wasserrädern darstellt. Das zusammengestellte Wissen basiert dabei fast ausschließlich auf Erfahrungswerten und bietet nur überschlägige Berechnungsformeln. Eine in sich konsistente, allein auf theoretischen Überlegungen hergeleitete Berechnungs- und Bemessungstheorie konnte bisher nicht entwickelt werden, obwohl dazu u.a. selbst von VON MISES Anstrengungen unternommen wurden [Mis08]. Die letzten empirischen Untersuchungen stammen noch von MEERWARTH [Mee34] aus dem Jahr 1934 für überschlächtige Wasserräder sowie aus dem Jahr 1977, als von der TU Stuttgart an einem bereits damals 90 Jahre alten, aber noch in Betrieb befindlichen mittelschlächtigen Wasserrad umfangreiche Studien durchgeführten worden sind [Neu77]. Für Schaufelwasserräder im mittel- und unterschlächtigen Einsatzbereich existieren darüber hinaus überhaupt keine dokumentierten experimentellen Untersuchungen. Anfang des 21. Jahrhunderts erfolgte mit der Umsetzung der verstärkten Nutzung erneuerbarer Energien eine Wiederentdeckung der Wasserradtechnologie, wobei jedoch vorerst nur das historische Wissen zur konventionellen Wasserradtechnologie im Kleinwasserkraftbereich zusammengestellt wurde [Mül03, Mül05, Nue05, Kön05, Gie09, Jen09].

Einsatzbereiche von Wasserrädern. Konventionelle Wasserräder decken nur den Bereich der Kleinwasserkraft mit im Vergleich zur Turbinentechnologie kleinen Fallhöhen bis maximal 12 m und Durchflüssen bis zu $5 \text{ m}^3/\text{s}$ ab. Dabei erreichen sie Leistungen von 1 kW – 50 kW (vgl. Abbildung 5.5). Für den Bereich mit Durchflüssen oberhalb von $1 \text{ m}^3/\text{s}$ bei Fallhöhen größer 1.5 m – 2.0 m beginnt dabei die Überschneidung mit dem möglichen Einsatzbereich von heutigen Turbinen für den Kleinwasserbereich, welche in der Regel speziell angepasste KAPLAN-Turbinen sind. Innerhalb der Familie der Wasserräder im Bereich der Kleinwasser-

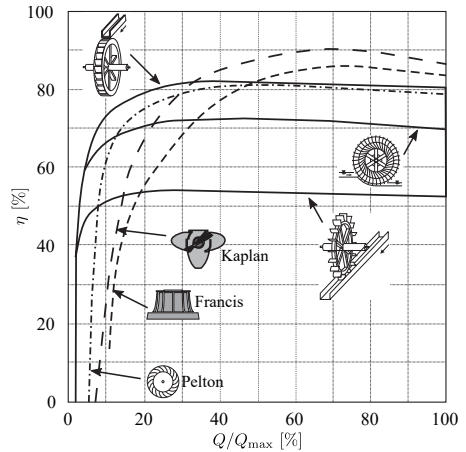
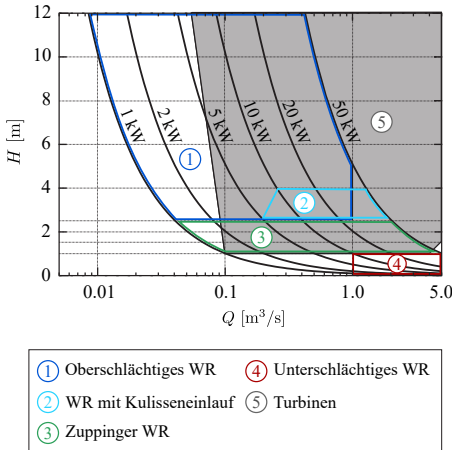


Abb. 5.5: Einsatzbereiche von Wasserrädern (nach [Nue05])

Abb. 5.6: Wirkungsgradverläufe von Wasserrädern und Turbinen (nach [Gie09])

kraft kommen bei großen Fallhöhen mit in der Regel kleinen Durchflussmengen oberflächige Wasserräder zum Einsatz. Bei abnehmender Fallhöhe und zunehmender Durchflussmenge geht dabei die Anwendung von mittel- über tief- hin zu unterschlächtigen Wasserrädern. Im Vergleich zu Turbinen ist der Wirkungsgradverlauf von Wasserrädern für fast den gesamten Arbeitsbereich von $0.1 \leq Q/Q_{\max} \leq 1.0$ konstant hoch und weist einen plateauförmigen Verlauf auf. In Abbildung 5.6 ist der Wirkungsgradverlauf der drei Wasserrad-Haupttypen denjenigen von Turbinen gegenübergestellt. Erkennbar ist der bereits deutlich unter $0.05 Q_{\max}$ einsetzende Arbeitsbereich bei Wasserrädern mit Erreichen des Wirkungsgradplateaus schon ab $0.1 Q_{\max}$. Sowohl FRANCIS- als auch KAPLAN-Turbinen benötigen eine größere Mindestbetriebswassermenge und erreichen ihre optimalen Wirkungsgrade von knapp 95 % erst wesentlich später bei 0.5 (KAPLAN) bzw. $0.6 Q/Q_{\max}$ (FRANCIS). Bei Propellerturbinen ist die starke Abhängigkeit des Wirkungsgradverlaufs vom Durchfluss noch wesentlich stärker ausgeprägt. Dagegen weisen PELTON-Turbinen einen den Wasserrädern ähnlichen Wirkungsgradverlauf auf. Zum vertiefenden Verständnis sind die Einsatzgebiete der genannten Turbinentypen und ihre Entwicklungsgeschichte in Anhang A.3 kurz zusammengestellt. Auch wenn alle Wasserradtypen einen ähnlichen Wirkungsgradverlauf aufweisen, so unterscheiden sich die erzielbaren Wirkungsgradmaxima. Diese liegen bei oberflächigen Wasserrädern bei knapp 90 %, während bei unterschlächtigen Wasserrädern im tatsächlichen Betrieb von nur noch etwas über 50 % erreicht werden. Mittelschlächtige Wasserräder liegen im Mittel bei ca. 80 %.

Niedere Fallhöhen. Gegenwärtig existiert für den Bereich der niederen Fallhöhen von $0.4 \text{ m} - 4.0 \text{ m}$ und großen Durchflussmengen keine geeignete Technologie, die sowohl technisch als auch wirtschaftlich in der Lage ist, diesen Wasserkraftbereich zu erschließen. Obwohl KAPLAN-Turbinen für den Betrieb im Bereich der niederen Fallhöhen und großen Durchfluss-

mengen ausgelegt sind, liegt ihre wirtschaftliche Arbeitsgrenze im Hinblick auf ihren Wirkungsgradverlauf bei Fallhöhen zwischen 3 m – 4 m mit einer technischen Grenze von 2 m infolge der zu geringen hydraulischen Pressung. Unterhalb dieser Fallhöhengrenze existieren bisher keine alternativen Technologien für den Bereich der großen Durchflussmengen. Für den Bereich der niederen Fallhöhen bei großen Durchflussmengen haben sich heutzutage Wasserräder gegenüber Turbinen als geeignete Technologie erwiesen [Sei16]. Gegenüber Turbinen, deren technische Entwicklung vor fast 200 Jahren begonnen und heute als ausgereift gelten kann, muss die Anfang des 20. Jahrhunderts zum Erliegen gekommene Entwicklung in der Wasserradtechnologie jedoch zuerst fortgeschrieben werden, um im Bereich der niederen Fallhöhen auch große Durchflussmengen verarbeiten zu können. Dieses Ziel verfolgt die von der Arbeitsgruppe Regenerative Energien am Institut für Statik der TU Braunschweig und Leitung von CHRISTIAN SEIDEL bestehende Arbeitsgruppe mit Berechnung, Konstruktion und Bau von Hochleistungswasserrädern im Zuge der wissenschaftlichen Weiterentwicklung der konventionellen Wasserradtechnologie hin zur Weiterentwickelten Wasserradtechnologie (WWT).

5.1.2 Hochleistungswasserräder

Ungenutztes Wasserkraftpotential. Im Bereich der Laufwasserkraft mit niederen Fallhöhen im Bereich von 0.4 m – 4.0 m und Durchflussmengen oberhalb von $5 \text{ m}^3/\text{s}$ ist das darin verfügbare Wasserkraftpotential gegenwärtig weder wirtschaftlich noch technisch mit den bisherigen Technologien nutzbar. Dieses ungenutzte Wasserkraftpotential besitzt weltweit eine Leistung von ca. 1300 GW, mit Ausbaupotentialen in Europa von 50 GW und in Deutschland von 2 GW – 3 GW, wovon 850 MW – 1200 MW auf Standorte mit erzielbaren Leistungen oberhalb von 1 MW entfallen. Diesem Potential liegen grundlastfähige Jahresstromproduktionen von weltweit 5000 TWh und in Deutschland von 10 TWh – 15 TWh zugrunde [Sei16, Zi08]. Mit dem Ziel der verstärkten Nutzung regenerativer Energien in Deutschland ist es vorteilhaft und sinnvoll gerade im Hinblick auf die Grundlastfähigkeit der Laufwasserkraft, Technologien zu entwickeln, um dieses Potential nutzbar zu machen.

Anwendungstechnische Lücke. Aufgrund der im Bereich der niederen Fallhöhen nur sehr geringen hydraulischen Pressung ist die heutzutage verfügbare Turbinentechnologie trotz ihrer fortgeschrittenen technischen Entwicklung nicht in der Lage, in diesem Bereich technisch bzw. wirtschaftlich arbeitsfähig zu sein. Hinzu kommen die bei Flachlandflüssen im Jahresverlauf stark schwankenden Durchflussmengen mit sehr niedrigen Abflussraten bei Trockenphasen und sehr hohen Durchflussmengen im Hochwasserfall. Sowohl bei KAPLAN-, aber noch vielmehr bei FRANCIS-Turbinen ist der Wirkungsgrad stark von der Durchflussmenge abhängig, so dass Turbinen in Flusskraftwerken nur eine gute Energieausbeute liefern, wenn sie möglichst ausdauernd im vorgesehenen Auslegungsbereich betrieben werden können. Auch der teilweise hohe Anteil an Geschiebe und Treibgut ist für Turbinen aufgrund der geringen Spaltmaße und hohen Drehzahlen problematisch und muss konstruktiv weitestgehend vom Rotor ferngehalten werden. Zwar sind Durchströmturbinen für niedrige Fallhöhen ausgelegt und in ihrer Konstruktion robust, können jedoch nur geringe Durchflussmengen verarbeiten und besitzen die oben genannten Schwierigkeiten der anderen Turbinenarten im Hinblick auf hydrologische, hydraulische und ökologische Gesichtspunkte. Dagegen haben sich Wasserräder historisch als

auch in aktuellen Untersuchungen als geeignete Technologie zur Energiegewinnung bei niederen Fallhöhen im Bereich der Laufwasserkraft mit im Jahresverlauf stark schwankenden Durchflussmengen gezeigt [Sei16]. Jedoch besteht auch hierbei die Notwendigkeit zur Weiterentwicklung, um die Verarbeitung von großen Durchflussmengen zu ermöglichen.

Weiterentwickelte Wasserradtechnologie. Die Entwicklungsgeschichte von Wasserrädern reicht im Vergleich zur fast 200 Jahren alten Turbinentechnologie wesentlich weiter zurück, jedoch kann die technische Entwicklung von Wasserrädern noch nicht als so weit fortgeschritten angesehen werden. Während die Entwicklung der Turbinentechnologie seit Anfang des 19. Jahrhunderts durchweg mit umfangreichen experimentellen Untersuchungen und der gleichzeitigen Ausbildung einer Berechnungs- und Konstruktionstheorie erfolgte (vgl. Abschnitt 5.1.1), ist dies trotz der mehr als tausendjährigen Nutzungsgeschichte bei Wasserrädern unterblieben [Sei16]. Deren Entwicklung vollzog sich nur erfahrungsbasiert anhand der sich in Nutzung befindenden Wasserräder. Aufgrund der sich seit Mitte des 18. Jahrhunderts rasant verbreitenden Turbinentechnologie, die sich auch für die bisher von Wasserrädern genutzten Standorte durchsetzte, unterblieb eine Verbesserung im Hinblick auf die im Industriezeitalter zur Verfügung stehenden Materialien und Konstruktionsmöglichkeiten. Damit gibt das Lehrbuch von MÜLLER [Mül39] auch den heute noch gültigen Stand der konventionellen Wasserradtechnologie wieder. Um auch die Wasserradtechnologie auf ein mit der Turbinentechnologie vergleichbares Niveau zu heben und so das Wasserkraftpotential im Bereich der niederen Fallhöhen und großen Durchflussmengen für Leistungen oberhalb von 500 kW zu erschließen, ist eine Weiterentwicklung der heute verfügbaren konventionellen technologischen Grundlagen notwendig. Dies geschieht im Rahmen der Weiterentwickelten Wasserradtechnologie durch systematische Zusammenstellung des verfügbaren Wissens und des Erfahrungsschatzes auf Basis der noch vorhandenen historischen Veröffentlichungen [Sei15]. Die sich daraus ergebenden theoretischen Grundlagen gründen sich vorwiegend auf stark vereinfachenden Annahmen und sind fast ausschließlich analytisch-geometrischer Natur. Des Weiteren wurden die historischen Konstruktionsregeln kritisch hinterfragt und mit dem heute verfügbaren theoretischen Wissenstand in den Bereichen Mechanik, Materialwissenschaft und Konstruktionstheorie abgeglichen bzw. um diese ergänzt [Sei07]. Darauf aufbauend konnte ein gegenständliches Modell im Maßstab 1:10 konstruiert werden, mit dem Laboruntersuchungen durchgeführt werden konnten, so dass die Weiterentwicklung der Wasserradtechnologie in neuerer Zeit auch wieder erstmalig von umfangreichen experimentellen Untersuchungen begleitet werden konnte. Darüber hinaus erfolgt die Weiterentwicklung insbesondere unter Verwendung numerischer Methoden, mit deren Hilfe u.a. eine detaillierte Analyse der Strömungszustände im Wasserrad möglich ist. Hierbei erfolgt stets ein kritischer Abgleich der numerischen Berechnungsergebnisse mit experimentellen Daten und den theoretischen Grundlagen.

Hochleistungswasserräder. Auf Grundlage der Weiterentwickelten Wasserradtechnologie werden sog. Hochleistungswasserräder (HLWRer) mit Durchmessern zwischen 8 m bis 12 m und Breiten über 10 m entwickelt, die bei Drehzahlen zwischen 1 U/min – 3.75 U/min Leistungen oberhalb von 500 kW erbringen und im Bereich der niederen Fallhöhen große Durchflussmengen von mehr als 50 m³/s verarbeiten können [Sei15]. In ihrer Ausführung als Schaufelwasserräder nach verbesserter ZUPPINGER Bauart mit Überfall und Kropf ist es damit möglich, das

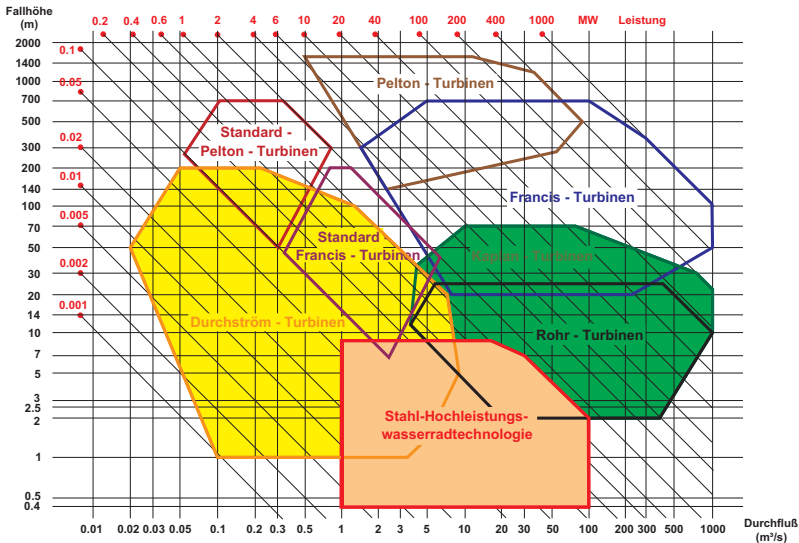


Abb. 5.7: Anwendungsbereich Weiterentwickelte Wasserradtechnologie [Sei16]

bisher nicht nutzbare Wasserpraptpotential der Laufwasserkraft zu erschließen (Abbildung 5.7). Die verbesserte konstruktive Durchbildung ermöglicht gegenüber konventionellen Wasserrädern deutlich höhere Wirkungsgrade von theoretisch über 90 %, wobei im realen Betrieb zwischen 80 % – 90 % zu erwarten sind. Darüber hinaus ermöglicht der große Arbeitsbereich von 10 % – 150 % des Bemessungsdurchflusses und 25 % – 180 % der bezogenen Fallhöhe ein ganzjährig hohes Arbeitsvermögen aufgrund der guten Anpassung an die bei Flachlandflüssen vorliegenden jahreszeitlichen Schwankungen im Abflussverhalten. Im Vergleich zu Turbinen kann infolge des höheren Jahresenergieertrags und der hohen Wirkungsgrade, insbesondere im Teillastbereich, ca. 10 % – 40 % mehr Strom produziert werden. Die Wirkungsgradhebung resultiert aus einer Gesamtbetrachtung der Anlage, insbesondere unter Hinzunahme von Einlauf- und Auslassbauwerk, aber auch infolge einer abgestimmten und verbesserten Steuerung und Regelung sowie im wesentlichen durch konstruktive Optimierungen des Wasserrades selbst. Unter anderem kann infolge einer verbesserten Schaufelform zusätzlich zur potentiellen Energie auch ein Teil der kinetischen Energie des Wassers gewonnen werden. Dies wird im »Herauflaufen« des einströmenden Wasserstrahls entlang der Schaufelfläche sichtbar, wodurch dieser zur Ruhe kommt und sich mit der Umfangsgeschwindigkeit des Rades in Richtung Unterwasser bewegt. Darüber hinaus kommt der Ausbildung des Überfallschützes sowie des Kropfes eine wesentliche Bedeutung zu, um sowohl Verluste beim Einlauf gering zu halten als auch ein frühzeitiges Entleeren der Schaufelzwischenräume weitestgehend zu unterbinden. Aufgrund der sehr großen Abmessungen, der geringen Drehzahlen und großen Durchflussmengen treten bei Hochleistungswasserrädern nicht nur sehr große Torsions-, sondern auch sehr große Biegemomente und Kräfte auf. Diesen wird gegenüber konventionellen Wasserrädern mit

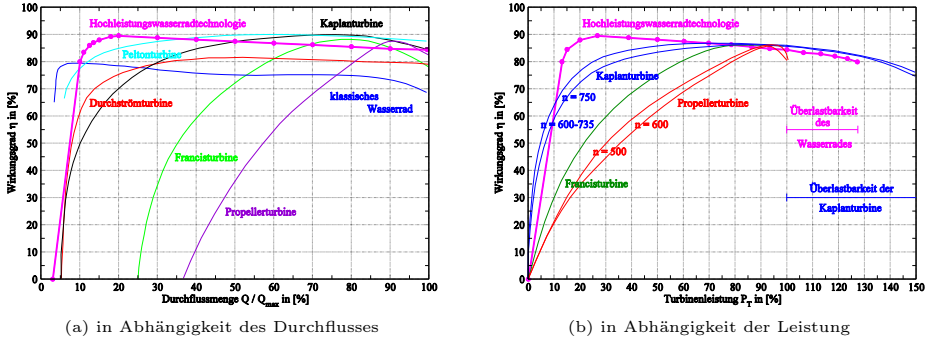


Abb. 5.8: Wirkungsgradverläufe von Hochleistungswasserrädern [Sei16]

einer umfassenden mechanischen und hydraulischen Überarbeitung der Konstruktion für den vorgesehenen Arbeits- und Leistungsbereich Rechnung getragen. Die geringen Drehzahlen in Verbindung mit den großen Abmessungen und Durchflussmengen hat demgegenüber jedoch auch ökologische Vorteile, da Fische ungehindert und verletzungsfrei die Wasserkraftmaschine passieren können und so keine zusätzlichen kostenintensiven und leistungsmindernden Schutzvorrichtungen vorzusehen sind. Dadurch sind Hochleistungswasserräder problemlos in der Lage sowohl die EU-Wasserrahmenrichtlinie, die Naturschutzgebietsverordnung als auch die Anforderungen aus der FFH-Richtlinie einzuhalten.

Wie auch bei konventionellen Wasserrädern zeigt der in Abbildung 5.8 dargestellte Wirkungsgradverlauf der entwickelten Hochleistungswasserräder, dass auch diese nur eine sehr geringe Mindestwassermenge von unter 5% Q_{\max} benötigen, um ihren Betrieb aufzunehmen. Bereits bei 0.1 Q_{\max} haben Hochleistungswasserräder Wirkungsgrade von über 80% und erreichen ihr Wirkungsgradplateau von 90% ab 0.2 Q_{\max} . Damit liegen sie insgesamt ca. 10% oberhalb der Wirkungsgradverläufe von konventionellen Wasserrädern. Im Vergleich zur heutigen Turbinentechnologie erbringen damit Hochleistungswasserräder der Weiterentwickelten Wasserradtechnologie ähnlich hohe Wirkungsgrade. Insbesondere im Teillastbereich unterhalb von 0.5 Q_{\max} zeigen sie dabei eine bessere Energieumsetzung durch höhere Wirkungsgrade gegenüber FRANCIS- aber auch KAPLAN-Turbinen. Lediglich PELTON-Turbinen können im Teillastbereich ähnlich effizient arbeiten, kommen für die Verarbeitung großer Durchflussmengen jedoch nicht in Frage. Die verbesserte Energieumsetzung im Teillastbereich gegenüber Turbinen wird besonders bei Betrachtung des in Abbildung 5.8b dargestellten Wirkungsgradverlaufes in Abhängigkeit der Leistung sichtbar.

Realisierung. Neben rein theoretischen, experimentellen und numerischen Untersuchungen ist zur Weiterentwicklung der Wasserradtechnologie auch die Gewinnung von Daten aus dem Betrieb im Großmaßstab notwendig. Bereits MEERWARTH hat festgestellt, dass sich die experimentell ermittelten Ergebnisse nicht ohne weiteres auf Großausführungen übertragen lassen und daher im Abgleich zwischen Modell- und Großausführung die Maßstabeffekte

ermittelt werden müssen [Mee34]. Daher erfolgt seit Anfang 2016 die Umsetzung der theoretischen Erkenntnisse der Weiterentwickelten Wasserradtechnologie durch Bau einer Versuchs- und Demonstrationsanlage am Allerwehr in Bannetze/Hornbostel als Kooperationsprojekt der TU Braunschweig und der Salzgitter AG [Gro16]. Das dort entstehende Stahl-Hochleistungswasserrad mit einem Durchmesser von 11 m und einer Breite von 12 m ist ausgelegt auf eine Leistung von 500 kW, wodurch unter den am Standort vorliegenden Abflussverhältnissen eine Jahresstromproduktion von 2.5×10^6 kWh erbracht werden kann. Pro Sekunde kann das Wasserrad 60 m^3 bei einer Umdrehungszahl von unter 4 U/min verarbeiten. Anhand der an der Großausführung gewonnen Messdaten können sowohl die theoretischen Erkenntnisse überprüft als auch die experimentellen Daten im Hinblick auf Maßstabs Effekte abgeglichen sowie die numerischen Ergebnisse validiert werden.

5.1.3 Wirkungsgradeinflüsse

Energieanteile. Wasserräder als Wasserkraftmaschinen machen die in der Strömung vorhandene Energie nutzbar. Diese kann dabei unterteilt werden in Lage- und Druckenenergie sowie kinetische Energie. Bei Reibungsfreiheit ist die Gesamtenergiehöhe h_E entlang eines Stromfadens zwischen den Kontrollpunkten 1 und 2 konstant und die BERNOULLI-Gleichung ergibt sich somit wie folgt

$$h_E = z_1 + \frac{p_1}{\rho g} + \frac{v_1^2}{2g} = z_2 + \frac{p_2}{\rho g} + \frac{v_2^2}{2g} = \text{const.} \quad (5.1)$$

Befindet sich eine Wasserkraftmaschine zwischen den beiden Kontrollpunkten, so ist die von ihr maximal nutzbare Energiehöhe

$$h_T = \frac{v_1^2 - v_2^2}{2g} + \frac{p_1 - p_2}{\rho g} + (z_1 - z_2) . \quad (5.2)$$

Während bei Turbinen alle drei Energiebestandteile umgesetzt werden, kommt bei Wasserrädern aufgrund der in der direkten Umgebung der Wasserkraftmaschine konstanten Höhenlage sowie der Gleichheit von Eintritts- und Austrittsgeschwindigkeit nur die Nutzung der potentiellen Energie in Form der Druckdifferenz $\Delta p = p_1 - p_2$ resultierend aus der Fallhöhe $\Delta h = h_1 - h_2$ zum Tragen

$$h_T = \Delta h = h_1 - h_2 = \frac{p_1}{\rho g} - \frac{p_2}{\rho g} . \quad (5.3)$$

Dabei resultiert die Kraftwirkung auf die Schaufeln bei Wasserrädern ausschließlich aus der Eigengewichtskraft der Wasservolumina in den Schaufelräumen, während bei Turbinen die antreibende Kraft durch Strömungsumlenkung und -beschleunigung beim Durchströmen der Schaufelräume entsteht.

Leistungsermittlung. Wesentlich für Wasserkraftmaschinen ist die möglichst vollständige Umsetzung der zur Verfügung stehenden Leistung. Bei ober- und mittelschlächtigen Wasserrädern ergibt sich die pro Zeiteinheit zur Verfügung stehende Energie ausschließlich aus der Fallhöhe als potentielle Energie [Nue05]. In der Regel sind dabei nicht nur die geodätischen

Höhen des Ober- und Unterwassers unmittelbar vor und nach dem Wasserrad, sondern auch die Ein- und Ausströmgeschwindigkeiten gleich groß. Damit ergibt sich unter Verwendung von Gleichung (5.2) die theoretische, hydraulische Leistung des Wasserrades als Wasserkraftmaschine:

$$P_{\text{theo}} = Q \rho g \Delta h . \quad (5.4)$$

Wird zusätzlich wie bei tief- und unterschlächtigen Wasserrädern die Fließgeschwindigkeit beim Durchströmen des Wasserrades abgebremst, so können auch kinetische Energieanteile nutzbar gemacht werden, wodurch sich die theoretische Leistungsberechnung erweitert zu:

$$P_{\text{theo}} = Q \rho g \left[\Delta h + \frac{v_1^2 - v_2^2}{2g} \right] . \quad (5.5)$$

Aus der Leistung kann das maximale Arbeitsvermögen der Wasserkraftmaschine durch Integration der theoretischen Leistung über die Zeit ermittelt werden

$$A_{\text{theo}} = \int P_{\text{theo}} \, dt . \quad (5.6)$$

Verlusteinflüsse. In der Realität kann die theoretisch zur Verfügung stehende Leistung P_{theo} niemals vollständig genutzt werden, da stets Verluste im Zuge der Energieumwandlung auftreten [Nue05]. Den Zusammenhang zwischen der tatsächlich erreichbaren Leistung P_{real} und der theoretisch zur Verfügung stehenden Leistung P_{theo} stellt der Wirkungsgrad η dar. Dabei kann die tatsächliche erreichbare Leistung aus der theoretisch zur Verfügung stehenden Leistung abzüglich aller auftretenden Verluste Σh_V berechnet werden

$$\eta = \frac{P_{\text{real}}}{P_{\text{theo}}} = \frac{P_{\text{theo}} - \Sigma h_V}{P_{\text{theo}}} = 1 - \frac{\Sigma h_V}{\Delta h} . \quad (5.7)$$

Neben den Anlagenverlusten, die im Ein- und Auslaufbereich der Wasserkraftanlage auftreten (Strömungsumlenkung, Querschnittsveränderung, Wirbelablösung und Totwasserbereiche) sowie den mechanischen und elektrischen Verlusten am Getriebe und Generator, sind insbesondere die unmittelbar an der Wasserkraftmaschine auftretenden Verluste von entscheidender Bedeutung. Bei Schaufelwasserrädern mit Kropfgerinne treten die unmittelbaren Strömungsverluste im Eintrittsbereich, im inneren Bereich der Schaufelräume und des Kropfes sowie im Austrittsbereich auf. Im Folgenden werden das in den einzelnen Bereichen vorliegende Strömungsverhalten und die damit verbundenen Verluste genauer besprochen. Die zusammenfassende Darstellung der Verluste basiert im wesentlichen auf [Nue05], welches selbst zu großen Teilen auf den Arbeiten von [Mül39], [Mül99b] und [Bac86] basiert.

Eintrittsbereich. Beim Eintritt des Wasserstrahls in das drehende Rad trifft der Strahl auf die Schaufeln. Besitzt dabei der relative Geschwindigkeitsvektor des Wasserstrahls auch eine Komponente senkrecht zur Schaufelebene, so erfährt das Wasserrad eine zyklische, impulsartige Beanspruchung bei jedem Schaufeldurchgang. Die Schaufel erfährt dabei einen Stoß, wenn der zur Schaufelebene orthogonale Anteil des relativen Geschwindigkeitsvektors in Umdrehungsrichtung zeigt, und einen Rückschlag, wenn dieser Anteil in die der Umdrehungsrichtung entgegengesetzte Richtung weist. Dabei ist der Rückschlag deutlich nachteiliger als der

Stoß, da bei ihm nutzbare Energie dissipiert wird. Stoß- und Rückschlagsfreiheit können durch Anpassung von Geschwindigkeit und Winkel des eintretenden Wasserstrahls an die Schaufelform und die Umfangsgeschwindigkeit des Rades erreicht werden. Im Eintrittsbereich ist dem Wasserrad dazu ein Überfallkörper vorgeschaltet, dessen Strömungszustände gut erforscht und einstellbar sind (vgl. Abschnitt 4.1). Durch entsprechende Wahl des Eintrittspunktes ergeben sich für einen bestimmten Strömungszustand Strahlgeschwindigkeit und -winkel. Der maßgebende Strömungszustand ist hierfür der Konstruktionsdurchfluss. Aufgrund des Rückstaus durch das Wasserrad liegt in der Regel ein unvollkommener Überfall und damit Überdruck auf dem Überfallrücken vor. Als wirkungsgradmindernde Einflüsse treten somit im Eintrittsbereich die Verluste infolge der Strömungsänderung am Überfallkörper und beim Hochlaufen des eintretenden Wasserstrahls an der Schaufelvorderseite sowie Stoß- und Rückschlagsverlust auf.

Innerer Bereich. Nachdem der Wasserstrahl im Eintrittsbereich die Schaufelvorderseite hochgelaufen und zur Ruhe gekommen ist, bewegt sich das in den Schaufelraum eingetretene Wasservolumen in Umdrehungsrichtung in Richtung Unterwasser. Für die Schaufelform wird als Konstruktionskurve eine logarithmische Spirale verwendet, wobei in der praktischen Umsetzung diese durch eine Kombination aus Kreisbogen und Gerade angenähert wird. Dabei liegen der Wahl der Schaufelform unterschiedliche Konstruktionsaspekte zugrunde. Zum einen soll die Krümmung der Schaufel ein verlustarmes Hochlaufen des eintretenden Wasserstrahls mit anschließender Beruhigung gewährleisten. Auch darf der Schaufelraum zum Radinneren hin nicht unnötig stark verengt werden, da ansonsten der sich eigentlich beruhigende Wasserstrahl aufgrund der Verengung wieder beschleunigt wird. Unter Umständen kann es dann sogar zu einem Wasserübertritt in das Radinnere kommen. Zum anderen ist zur Vermeidung von Stoß- und Rückschlag am Eintritt die Abstimmung von Schaufelwinkel und Eintrittswinkel des Wasserstrahls notwendig. Der Schaufelwinkel selbst gewährleistet darüber hinaus eine verlustarme bodenparallele Abströmung. Die Schaufeln stellen in Form und Anzahl die Begrenzung des Schaufelraumes dar. Im Zusammenspiel mit der Drehzahl bestimmt der Schaufelraum die maximal verarbeitbare Durchflussmenge, die als Schluckvermögen bezeichnet wird. Sie ist nur von den geometrischen Abmessungen und der Drehzahl abhängig, jedoch nicht wie bei Turbinen auch von der Fallhöhe. Die Anzahl an Schaufeln hat Einfluss auf das Gangverhalten des Wasserrades. Bei einer nur sehr kleinen Anzahl an Schaufeln werden nur wenige Schaufeln gleichzeitig beaufschlagt. Diese impulsweise Beaufschlagung führt zu einem eher ruckartigen Gangverhalten. Durch eine Erhöhung der Schaufelanzahl kann die gleichzeitige Beaufschlagung mehrere Schaufeln erreicht und damit eine stetigere Belastung des Rades erzielt werden. Jedoch verringern zu viele Schaufeln wiederum die Schluckfähigkeit und führen zu höheren Verlusten im Austrittsbereich. Aufgrund der Drehbewegung des Rades muss stets ein Spalt zwischen Schaufelspitze und Kropf sowie den Schaufelseiten und den Kammerwänden vorhanden sein. Sowohl über den Kropfspalt als auch über den Seitenspalt kommt es zu Wasserübertritten zwischen den einzelnen Schaufelräumen und damit zu Wirkungsgradverlusten. Neben einer Verringerung der Spaltdicke an sich reduziert auch eine scharfkantige Schaufelspitze die übertretenden Wassermengen. Zusätzlich treten im Kropfspalt auch Reibungsverluste infolge des durchströmenden Wassers auf. Diese hängen maßgeblich von der Umdrehungsgeschwindigkeit des Rades ab und können daher mit geringen Drehzahlen klein gehalten werden.

Austrittsbereich. Ab dem unteren Scheitelpunkt beginnt das Wasser den Schaufelraum des Rades wieder zu verlassen. Entscheidenden Einfluss auf das Abströmverhalten hat dabei das Verhältnis der Wasserspiegellagen zwischen dem letzten geschlossenen Schaufelraum und dem Unterwasser. Optimal ist dabei eine ausgeglichene Wasserspiegellage, die vorliegt, wenn die Austrittsgeschwindigkeit der Abströmgeschwindigkeit des Unterwassers entspricht. Hingegen ist sowohl eine im Vergleich zum letzten geschlossenen Schaufelraum niedrigere als auch eine höhere Wasserspiegellage nachteilig. Bei einer höheren Wasserspiegellage ist die Fließgeschwindigkeit des Unterwassers zu gering, so dass das Wasserrad gegen das zurückströmende Wasser anarbeiten muss. Die Ausbildung einer energieverzehrenden Deckwalze ist möglich. Bei einer niedrigeren Wasserspiegellage hingegen reduziert sich die Leistung geringfügig, da die relative Austrittsgeschwindigkeit erhöht wird. Neben dem Einfluss der Differenz der Wasserspiegellagen im Austrittsbereich wirkt sich auch die Richtung des austretenden Wassers auf den Wirkungsgrad aus. Infolge der Drehbewegung des Rades ist das austretende Wasser drallbehaftet und im Hinblick auf ein möglichst großes Drehmoment sollte unter Beachtung der Turbinenhauptgleichung optimalerweise eine radiale Abströmung angestrebt werden. Für diese Art der Abströmung müsste der bodenseitige Austrittsbereich der Wasserkraftanlage jedoch entsprechend ausgebildet sein. In der Regel liegt jedoch eine horizontale Bodenfläche vor, so dass eine wirbelarme bodenparallele Abströmung angestrebt und die dadurch vorhandenen Drehmomentverluste in Kauf genommen werden. Die Einstellung der Richtung des aus dem Rad austretenden Wassers erfolgt mit Hilfe des Schaufelwinkels. Dieser wird in Abhängigkeit des Durchflusses und der Drehzahl so gewählt, dass eine bodenparallele Austrittsströmung für den Bemessungszustand gewährleistet ist. In der Regel liegt der Schaufelwinkel dabei zwischen 60° und 70° . Die Verluste im Austrittsbereich setzen sich damit zusammen aus dem Verlust infolge unterschiedlicher Wasserspiegellagen zwischen letztem geschlossenen Schaufelraum und Unterwasser sowie dem Verlust infolge Verwirbelung bei nicht bodenparalleler Abströmung. Hinzu kommt noch ein geringer Verlustanteil infolge des Hochziehens von anhaftendem Wasser an den Schaufeloberflächen.

Nutzleistung. Aufgrund der in den vorausgegangenen Absätzen aufgeführten Strömungsphänomene und Verluste steht in der Realität nicht die vollständige theoretische Leistung P_{th} zur Verfügung. Von ihr müssen stets die vorhandenen Verlustleistungen abgezogen werden. Unter Berücksichtigung der unmittelbaren hydraulischen Verluste am Wasserrad sowie der Lagerreibung der Wasserradwelle als mechanischem Verlust ergibt sich die zur Verfügung stehende Nutzleistung zu

$$P_N = P_{th} - P_{V,hydr} - P_{V,mech} \quad (5.8)$$

Dabei setzt sich die hydraulische Verlustleistung additiv aus den in den vorangegangenen Abschnitten besprochenen Verlusten im Eintrittsbereich, im inneren Bereich und im Austrittsbereich zusammen

$$P_{V,hydr} = \rho g Q \Sigma h_{V,hydr} = \rho g Q [\Sigma h_{V,e} + \Sigma h_{V,i} + \Sigma h_{V,a}] \quad (5.9)$$

Die additive Berücksichtigung der Verluste der einzelnen Bereiche kann damit begründet werden, dass die Verluste im inneren Bereich des Wasserrades $\Sigma h_{V,i}$ mit Ausnahme der Kropfreibung nur von der Gewichtswirkung des Wassers und damit der Fallhöhe Δh abhängig sind. Hingegen sind die Verluste im Ein- und Austrittsbereich, $\Sigma h_{V,e}$ und $\Sigma h_{V,a}$, praktisch unabhängig von der Fallhöhe und werden ausschließlich von der Strömungsgeschwindigkeit bzw.

der Abstimmung der Umdrehungsgeschwindigkeit auf die Ein- und Austrittsgeschwindigkeit beeinflusst. Die geschwindigkeitsabhängigen Ein- und Austrittsverluste treten bei kleinen Fallhöhen deutlicher zutage, da die fallhöhenabhängigen inneren Verluste sich mit abnehmender Fallhöhe verringern, so dass Wasserräder bei größeren Fallhöhen stets höhere Wirkungsgrade erzielen.

Bezieht man die Nutzleistung auf die theoretische Leistung, so erhält man den hydraulischen Wirkungsgrad η_{hydr} nach Gleichung (5.7). Im Allgemeinen kann der hydraulische Wirkungsgrad als eine Funktion der Naturparameter (Durchfluss und Fallhöhe), der Geometrieparameter (Raddurchmesser, Schaufform und -anzahl, Eintrittswinkel, Tauchung etc.) und der Steuerungsparameter (Drehzahl) angesehen werden. Jedoch werden die geometrischen Abmessungen für eine bestimmten Bemessungssituation hin ermittelt und liegen dadurch fest. Prinzipiell sind auch die Naturparameter nicht beeinflussbar, jedoch erfolgt die Wasserzufuhr in der Regel über vom Hauptgerinne abzweigene Wasserzuleitungen, so dass der Zufluss kontrollierbar ist. Damit kann der hydraulische Wirkungsgrad eines Wasserrades als eine Funktion von Durchfluss Q und Drehzahl n angesehen werden $\eta_{\text{hydr}} = \eta_{\text{hydr}}(Q, n)$. Er beinhaltet nicht nur die unmittelbaren strömungsabhängigen Verluste des Rades, sondern zusätzlich noch die mechanischen Verluste aus Lagerreibung, da diese zu den unmittelbaren Anlagenverlusten gehören und nur schwer separat erfasst werden können. Zusätzlich zu den unmittelbaren hydraulischen und mechanischen Verlusten kommen noch die Verluste an Getriebe und Generator, woraus sich der Gesamtwirkungsgrad der Wasserkraftanlage ergibt

$$\eta_{\text{ges}} = \eta_{\text{hydr}} \cdot \eta_{\text{Getr}} \cdot \eta_{\text{Gen}} \quad (5.10)$$

Alternativ zur Ermittlung der Nutzleistung P_N nach Gleichung (5.8), welche vorwiegend im Rahmen der Planung zum Tragen kommt, wird die bei realisierten Anlagen tatsächliche vorliegende Leistung unter Zuhilfenahme des vorliegenden Drehmomentes M und der Winkelgeschwindigkeit ω berechnet

$$P_N = M \omega \quad (5.11)$$

Das Drehmoment wird entweder direkt über einen Drehmomentenmesser abgegriffen oder über eine Kraftmessung mit dem zugehörigen Hebelarm ermittelt. Für die Konstruktion, insbesondere die Welle, sind dabei kleinere Drehmomente günstiger. Diese können sowohl durch kleine Radradien als auch höhere Drehzahlen erzielt werden. Große Drehmomente treten hingegen bei sehr großen und langsam laufenden Rädern auf und sind in der Regel mit hohen Fertigungskosten verbunden. Auch ist der Einfluss der bei großen Rädern geringeren Umdrehungsgeschwindigkeit auf die Ein- und Austrittsverluste nur schwach ausgeprägt.

Steuerung. Für einen gegebenen Wasserkraftstandort mit Durchflussmenge Q und Fallhöhe Δh werden die geometrischen Parameter so gewählt, dass für den Bemessungszustand eine möglichst hohe Umwandlung der Strömungsenergie erreicht werden kann. Neben einer passenden Wahl der Geometrieparameter muss die für die vorliegende Radgeometrie und den vorhandenen Durchfluss optimale Drehzahl gefunden werden [Nue05]. Reduziert man die Verlusteinflüsse ausschließlich auf den Ein- und Austrittsbereich und ermittelt dafür den Wirkungsgradverlauf, so ist dieser bei gegebenem Durchfluss und Fallhöhe sowie fester Geometrie eine Funktion des Geschwindigkeitsverhältnisses von Einström- und Umdrehungsgeschwindigkeit bzw. ausschließlich der Umdrehungsgeschwindigkeit, da die Einströmgeschwindigkeit mit

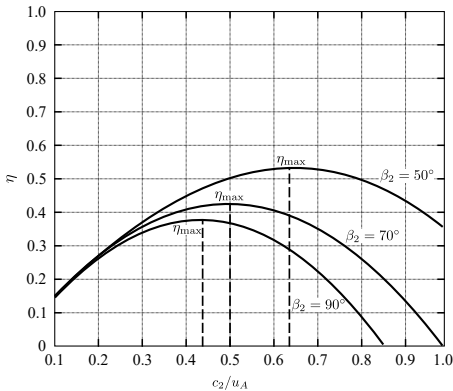


Abb. 5.9: Wirkungsgradverläufe bei vers. Drehgeschwindigkeiten und Schau-felwinkeln (nach [Nue05])

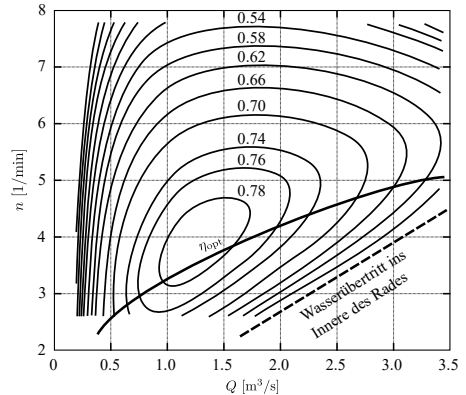


Abb. 5.10: Muschelkurven mit Isolinien und Optimalcurve (nach [Nue05])

Wahl von Eintrittspunkt und Geometrie des Überfallkörpers festlegt. Betrachtet man in Abbildung 5.9 den Verlauf des Wirkungsgrades für einen festen Schau-felwinkel, so lässt sich für einen breiten Umdrehungsbereich eine nur geringfügige Veränderung des Wirkungsgrades beobachten. Dadurch arbeiten selbst nicht optimal gesteuerte Wasserräder nahezu mit maximalem Wirkungsgrad.

Lässt man eine Veränderlichkeit des Schau-felwinkels als wesentlichen geometrischen Parameter zu, so ergibt sich, dass mit kleiner werdendem Schau-felwinkel der Wirkungsgradverlauf ansteigt. Der maximale Wirkungsgrad liegt nun bei höheren Umdrehungsgeschwindigkeiten vor, da aufgrund der größeren Schau-felkrümmung höhere Austrittsgeschwindigkeiten möglich werden, die weiterhin eine optimale Abströmung gewährleisten. Dagegen liegt der niedrigste Wirkungsgradverlauf bei radial endenden Schau-feln vor. Anhand des Schau-felwinkels lässt sich damit eine Anpassung der Umdrehungsgeschwindigkeit an die Eintrittsgeschwindigkeit und damit die vorliegende Strömungssituation wesentlich vornehmen. Damit können sehr kleine Drehzahlen und die dabei auftretenden großen Drehmomente vermieden werden. Gleichzeitig vergrößern höhere Drehzahlen auch die Schluckfähigkeit. Vollständig frei ist man jedoch bei der Wahl des Schau-felwinkels nicht, da eine Abstimmung von Eintritts- und Schau-felwinkel im Hinblick auf Stoß- und Rückschlagsfreiheit gewährleistet werden sollte.

Betrachtet man zusätzlich auch die inneren Verluste und fasst den hydraulischen Wirkungsgrad wieder als eine Funktion von Durchfluss Q und Drehzahl n auf, so können z.B. durch in situ Messungen Wirkungsgradverläufe wie in Abbildung 5.10 gewonnen werden. Darin ist die sog. Muschelkurve eines Wasserrades anhand ihrer Höhenlinien abgebildet, so dass sich der Wirkungsgradverlauf in Abhängigkeit von Durchfluss Q und Drehzahl n ablesen lässt. Wie bereits auch bei der reinen Berücksichtigung von Ein- und Austrittsverlusten in Abbildung 5.9 liegt auch bei Berücksichtigung sämtlicher Verluste ein flacher Wirkungsgradverlauf über der Drehzahl und auch dem Durchfluss vor. Bei höheren Drehzahlen sinkt dabei der Wirkungsgrad

infolge größerer Austrittsverlust sowie der steigenden Kropfreibung. Wird hingegen die Drehzahl zu gering, so beginnt Wasser aus den Schaufelräumen ins Radinnere überzutreten. Damit existiert eine untere Schranke für die Drehzahl, ab der der Wirkungsgrad rechnerisch auf Null gesetzt wird. Wie bei sehr kleinen Drehzahlen so sinkt auch bei sehr geringen Durchflüssen der Wirkungsgrad ab, da die Spaltverluste sich wesentlich stärker auswirken. Hingegen dominieren bei großen Durchflüssen vorwiegend die Ein- und Austrittsverluste. Am Eintritt treten Stoßverluste infolge des sehr breiten Wasserbandes auf, während am Austritt die Reibungs- und Abströmverluste zunehmen.

Optimierung. Zur Verbesserung der Energieübertragung und damit Wirkungsgradhebung müssen die Verluste in den einzelnen Bereichen reduziert werden [Nue05]. Dabei können die einzelnen Bereiche überwiegend getrennt voneinander betrachtet werden, da die Verluste im Ein- und Austrittsbereich geschwindigkeitsabhängig und diejenigen im inneren Bereich gewichtskraftabhängig sind. Verbindendes Element aller drei Bereiche ist die Schaufel. Zur Wirkungsgradhebung im Eintrittsbereich sind insbesondere Art und Geometrie des dem Wasserrad vorgeschalteten Eintrittskörpers an die vorliegende Strömungssituation anzupassen. Ziel ist eine möglichst optimale Abstimmung von Eintrittsgeschwindigkeit und -winkel an Schaufelwinkel und Drehzahl. Überfallwehre und -schütze sind besonders geeignet, da sie sowohl große Durchflussmengen verarbeiten können als auch bei beweglicher Ausführung regelbar sind, so dass für jede Durchflussmenge der optimale Überfallstrahl ausgebildet werden kann. Zusätzlich könnte durch Einführung eines von der Drehposition abhängigen verstellbaren Schaufelwinkels für einen breiteren Durchflussmengenbereich eine verbesserte Abstimmung von Eintritts- und Schaufelwinkel gelingen, um Stoß- und Rückschlageffekte auch für Strömungssituationen abweichend von der Bemessungssituation zu vermeiden. Die Schaufelform muss so ausgebildet sein, dass sie den eintretenden Wasserstrahl aufgrund ihrer Krümmung möglichst verlustfrei beruhigt und so seine kinetische in potentielle Energie umgewandelt und damit für das Wasserrad nutzbar wird. Im inneren Bereich können die Verluste im Wesentlichen nur durch Reduzierung der Spaltmaße erreicht werden, ggf. unter Verwendung geeigneter, noch zu entwickelnder Dichtungen, die auch bei stetiger Drehbewegung Wasserübertritte verhindern. Eine Verlustreduzierung im Austrittsbereich gelingt durch Anstreben einer möglichst radialen, wirbelarmen Abströmung. Zum einen kann dafür der Austrittskörper entsprechend baulich angepasst werden [Nue05], zum anderen gelingt dies mit einem an Durchfluss und Drehzahl angepassten Schaufelwinkel. Ist die Einstellung des Schaufelwinkels in Abhängigkeit von der Drehposition möglich, so kann dieser separat sowohl für den Eintritts- als auch für den Austrittsbereich optimal eingestellt werden. Darüber hinaus ist eine ausgeglichene Wasserspiegellage zwischen letztem geschlossenen Schaufelraum und dem Unterwasser zu halten, damit weder ein Anarbeiten gegen zurückströmendes Wasser noch ein zu schnelles Abströmen hervorgerufen wird. Neben einer entsprechenden Anpassung der Drehzahl könnte dies durch Veränderung des Schaufelraumvolumens mittels entsprechend variabler Schaufeltiefe oder Radmittelpunkt erfolgen. Neben der ausschließlichen Anpassung der geometrischen Parameter an die Strömungssituation kann auch eine verbesserte Energieumsetzung durch eine variable Drehzahlregelung erreicht werden. Dadurch wäre es möglich auch bei fester Radgeometrie, die für den Bemessungszustand optimal ausgelegt ist, auch bei davon abweichenden Strömungszuständen hohe Wirkungsgrade zu erzielen.

5.2 Experimentelle Untersuchungen

5.2.1 Untersuchungsziele

Zusätzlich zu der bereits bei ein- und zweiphasigen Strömungen vorherrschenden Komplexität des physikalischen Geschehens tritt bei der Durchströmung von Wasserrädern noch die Interaktion mit dem Festkörper hinzu. Neben den bei reinen Strömungsvorgängen bereits vorhandenen Phänomenen wie Wirbelbildung und Turbulenz, welche sich mathematisch in der Nichtlinearität der NAVIER-STOKES-Gleichungen wiederfinden und unter Auflösung der kleinsten Skalen ein mathematisch chaotisches Lösungsverhalten ergeben, findet die Interaktion der Fluidgebiete mit dem Festkörper im Wesentlichen über die Schaufeln und hier vorwiegend an der Schaufelspitze statt. Die Wasseroberfläche wird durch das Eintauchen der Schaufel durchschnitten und es kommt an der Eintrittsstelle der Schaufelspitze zu einer ausgeprägten Vermischungen von Wasser und Luft. Die dort stattfindende Interaktion der zwei Fluidgebiete mit dem Festkörper erhöht deutlich den Modellierungsaufwand. Zusätzlich zu der Nichtlinearität der NAVIER-STOKES-Gleichungen tritt die Gebietsveränderlichkeit infolge der Fluid-Fluid- und der Fluid-Struktur-Interaktion hinzu. Hierbei erfolgt die Beschreibung beider Fluidphasen entweder auf veränderlichen räumlichen Gebieten oder bei festem Gesamtgebiet unter Beschreibung eines veränderlichen Grenzflächenverlaufs. In jedem Fall sind die Randbedingungen sowohl an der Fluid-Fluid- als auch an der Fluid-Struktur-Grenzfläche veränderlich. Im Hinblick auf die für die nun bewegten Fluid- und Strukturgebiete zu setzenden Anfangs- und Randbedingungen ist es über die bereits ins Abschnitt 4.2.1 hinaus angesprochenen Schwierigkeiten deutlich aufwendiger, eine korrekte Formulierung nach HADAMARD zu gewährleisten.

Die Erweiterung der Modellierung durch Hinzunahme des bewegten Strukturgebietes sowie der Interaktion von Fluid- und Strukturgebiet hat spürbare Auswirkungen auf den bei Strömungsberechnungen ohnehin unvermeidbar vorhandenen Diskretisierungsfehler (vgl. Abschnitt 4.2.1). Insbesondere die Einhaltung von Massen-, Impuls- und Energieerhaltung ist lokal, aber auch global, nicht automatisch gewährleistet und muss bei der Berechnung beobachtet und ggf. durch zusätzliche Maßnahmen gezielt gefordert werden. Dadurch ist der Berücksichtigung einer guten Konditionierung der numerischen Umsetzung ein wesentlich höheres Gewicht beizumessen.

Aufgrund der mit den oben genannten Punkten angedeuteten Komplexität der bei Wasserrädern vorliegenden Strömungscharakteristik sind zum Verständnis der Durchströmung von Wasserrädern und speziell der energieübertragenden Strömungsvorgänge experimentelle Untersuchungen heutzutage stets noch notwendig. Die dabei gewonnenen Ergebnisse dienen sowohl zum Abgleich mit numerischen Berechnungsergebnissen im Hinblick auf ihre physikalische Plausibilität als auch kann unter Beachtung der Gesetze der Ähnlichkeitsmechanik die Übertragung auf eine Großausführung vorgenommen werden.

5.2.2 Experimentalmodell

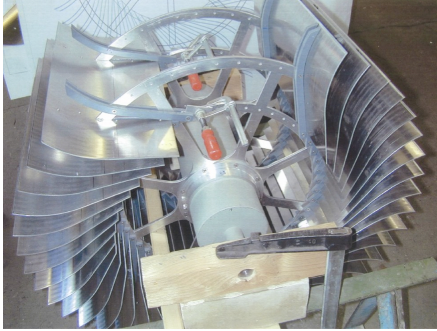
Versuchsaufbau. Unter Bezug auf den in Abschnitt 4.2 beschriebenen Versuchsaufbau des sich in der großen Geschieberinne befindenden Kreisbogen-Überfallschützes erfolgt die Untersuchung der Durchströmungsvorgänge im Schaufelwasserrad durch Erweiterung des dort beschriebenen experimentellen Aufbaus. Dazu wird dem Schützmodell ein Modell des Schwerlastwarrades SWR-8 im Maßstab 1:10 hinzugesetzt (Abbildung 5.11c und Abbildung 5.11d). Die Drehachse des Wasserrades ist dabei der Mittelpunkt des Konstruktionskreises des Schützes. In Verbindung mit dem Wasserrad dient das Schütz nun als dessen Regulierorgan zur Einstellung des Winkels des in die Schaufelräume eintretenden Wasserstrahls (vgl. Abschnitt 5.1).

Wasserradmodell. Das Wasserradmodell hat einen Durchmesser von 80 cm und stellt ein im Maßstab 1:10 geometrisch ähnliches Modell des Schwerlast-Wasserrades SWR-8 mit 8 m Durchmesser dar, das von der Arbeitsgruppe Regenerative Energien am Institut für Statik entwickelt wurde [Sei15]. Es handelt sich hierbei um ein Abschnittsmodell mit einer Durchflussbreite von 46 cm (Abbildung 5.11b), in der sich zwei Radarmsysteme befinden, so dass alle wesentlichen, die Strömung und die Kraftübertragung beeinflussenden Komponenten im Modell beinhaltet sind. Das Wasserradmodell besteht aus 48 Aluminium-Schaukeln, die im vorderen Verlauf kreisförmig gekrümmt sind und im hinteren Bereich gerade verlaufen (Abbildung 5.11a). Jedes Schaufelblech wird von vier Schaufelarmen gehalten, welche paarweise an die zwei Radarmsysteme angeschlossen sind. Die Radarmsysteme selbst bestehen aus acht Radarmen mit einem Rosettenkranz sowie einem inneren und einem äußeren Radring. Jedes Radarmsystem ist über den Rosettenkranz an der Radwelle befestigt. Bei der Radwelle handelt es sich um eine Holwelle mit einem Durchmesser von 135 mm und an beiden Enden aufgeschweißten Stirnplatten. Durch sie hindurch verläuft die 30 mm große Zapfenwelle, über die das Wasserrad beidseitig auf Pendelrollenlagern drehbar gelagert ist.

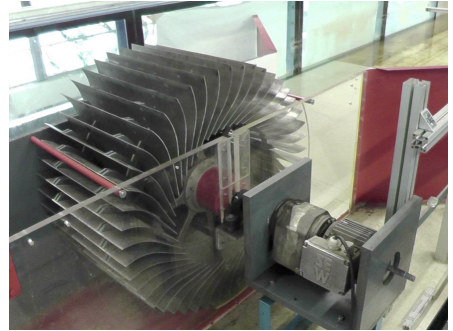
Physikalische Größe	Übertragungs- maßstab	FROUDE- Ähnlichkeit	Maßstabs- faktor
Länge	λ_l	λ_l	10.0
Drehzahl	λ_n	$\frac{1}{\sqrt{\lambda_l}}$	0.316

Tabelle 5.1: Übertragungsmaßstäbe Wasserradmodell SWR-8 (Ergänzung zu Tabelle 4.1)

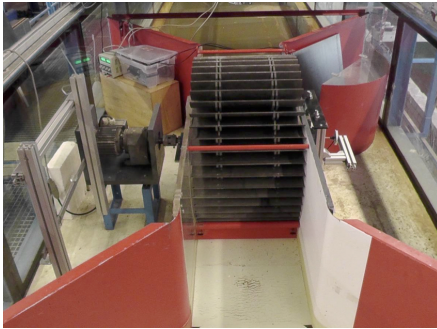
Übertragungsmaßstäbe. Wie auch bereits beim Experimentalmodell des Kreisbogen-Überfallschützes dienen die im Rahmen dieser Arbeit gewonnenen experimentellen Ergebnisse bei Schaufelwasserrädern nicht nur zur Plausibilitätsprüfung numerischer Berechnungen, sondern können auch unter Verwendung ähnlichkeitsmechanischer Übertragungsmaßstäbe auf eine Großausführung übertragen werden. Zusätzlich zu den bereits genannten Übertragungsmaßstäben (vgl. Abschnitt 4.2.2), die bei der Schützüberströmung vorliegen, tritt bei der Wasserraddurchströmung noch der Übertragungsmaßstab für die Drehzahl hinzu. Dabei liegt zwischen der Umdrehungszahl des Modells \bar{n} und der Umdrehungszahl der Großausführung n



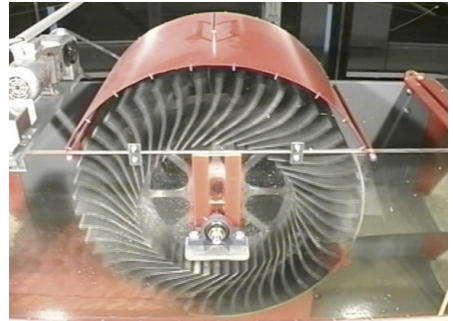
(a) Konstruktiver Aufbau [Sei15]



(b) Einbauzustand



(c) Einbausituation mit Kanalverengung



(d) Betriebszustand [Zil08]

Abb. 5.11: Experimentalmodell Schaufelwasserrad SWR-8

folgende Beziehung:

$$\bar{n} = \frac{1}{\sqrt{\lambda_l}} \cdot n \quad (5.12)$$

mit λ_l als Übertragungsmaßstab der Länge vor. Wie auch bereits bei den anderen Übertragungsgesetzen (Gleichungen 4.13 bis 4.17), liegt auch diesem infolge der Freispiegelströmung und der damit verbundenen Bedeutung des Schwerkrafteinflusses die Forderung nach FROUDEScher Ähnlichkeit zugrunde. Infolge der Wahl gleicher Fluidmaterialien bei Großausführung und Experiment verbleibt insgesamt als einzig unabhängiger Übertragungsmaßstab der Längenmaßstab mit $\lambda_l = 10$ wie bereits beim Experimentalmodell des Kreisbogen-Überfallschützes. In Tabelle 5.1 ist die Übertragungsmaßstab für die Drehzahl λ_n für das Modell-Wasserrad SWR-8 ausgewertet.

5.2.3 Versuchsergebnisse

Zielsetzung und Vorgehen. Analog zur Schützüberströmung sind bei der Wasserrad-Durchströmung zur Bereitstellung von Referenzlösungen im Hinblick auf den Abgleich auf physikalische Plausibilität ebenfalls experimentelle Untersuchungen notwendig. Dazu wird derjenige Zustand eingehender betrachtet, welcher der Auslegung der Wasserradkonstruktion zugrunde liegt. Für diesen gilt am Wasserradmodell ein Durchfluss von $21.81/\text{s}$ bei einer Drehzahl von 9.5 U/min und einer zugehörigen Schützstellung von 26 cm (OK Schützkrone), so dass sich im Oberwasser eine Wassertiefe von 37 cm einstellt. Dieser Zustand wird zusammenfassend auch als Konstruktionsdurchfluss bzw. Bemessungszustand bezeichnet und stellt den Betriebszustand des Wasserrades dar. Im Unterwasser liegt dabei eine Wassertiefe von 13 cm vor, welche den eingestauten Zustand bei optimalem Schaufelwinkel darstellt. Für diesen Zustand werden ausführlich die einzelnen Bereiche des Wasserrades (Vorlauf, Eintritt, Schaufelräume, Austritt) insbesondere im Hinblick auf die dort vorherrschenden Strömungsphänomene untersucht. Im Vorlaufbereich können wie auch bei der Untersuchung der Schützüberströmung Geschwindigkeitsfeldmessungen mittels ADV sowie Farbfadenuntersuchungen durchgeführt werden. Im Eintritts- und Austrittsbereich sowie in den Schaufelräumen muss sich hingegen aufgrund der Drehbewegung und der dort vorherrschenden Lichtverhältnisse auf eine reine visuelle Beobachtung beschränkt werden. Neben der Betrachtung des Konstruktionszustandes werden exemplarisch durch Variation der Abstimmung von Drehzahl und Durchfluss sowie Drehzahl und Einstauhöhe des Unterwassers noch weitere Zustände betrachtet. Die Variation der Abstimmung von Drehzahl und Durchfluss führt bei Abweichung vom optimalen Zustand zu einer Über- oder Unterfüllung der Schaufelräume, so dass es entweder zu einem Wasseraustritt in den Innenraum des Rades kommt bzw. nicht die vollständig vorgesehene Gewichtskraft je Schaufelraum zum Antrieb zur Verfügung steht. Bei einer nicht optimalen Abstimmung von Drehzahl bzw. Austrittsgeschwindigkeit des Wassers aus den Schaufelräumen im Hinblick auf die Abströmgeschwindigkeit im Unterwasser tritt entweder eine zu frühe Zellenentleerung oder Wellenbildung im Unterwasser auf. Für den Fall eines zu hohen Einstaus des Unterwassers ergibt sich der äußerst nachteilige Zustand des Förderbetriebes, bei dem die sich wieder hebenden Schaufeln auf ihrer Rückseite in ihrer Aufwärtsbewegung Wasser mit nach oben nehmen, welches in den Innenraum des Wasserrades strömt und ein der Drehbewegung entgegen gerichtetes Drehmoment erzeugt.

Vorlaufbereich. Wie auch bereits bei den Untersuchungen zum Überströmungsverhalten beim Kreisbogenschütz (vgl. Abschnitt 4.2.3) wird die Strömung im Vorlaufbereich des Wasserrades mit Hilfe der Einbringung von Farbfäden untersucht. In Abbildung 5.12 sind die Verläufe der Farbfäden in der Mittelachse $y02$ des Vorlaufbereichs sichtbar (Achsenbezeichnungen siehe Abbildung 4.14). Man erkennt die Aufwärtsbewegung der unteren Farbfäden in unmittelbarer Nähe zum Schütz und am Eintrittsbereich in die Schaufelräume des Wasserrades. Insbesondere in der oberen Lage der Farbfäden (Abbildung 5.12a) ist deren Zusammendrängung gut sichtbar. Unterhalb des untersten Farbfadens in Abbildung 5.12b steigen die Fluidpartikel nicht mehr zur Eintrittsöffnung hin auf, sondern bilden einen (hier nur skizzenhaft erkennbaren) zur Strömungsrichtung gegenläufigen Wirbel im unteren Bereich zwischen Boden und Schütz aus. Dieser sich in der Mittelebene ausbildende Bodenwirbel verändert zu den Seiten hin seine Gestalt. In Abbildung 5.13a sind die Farbfäden in der vorderen Schnittebene $y01$ dargestellt.

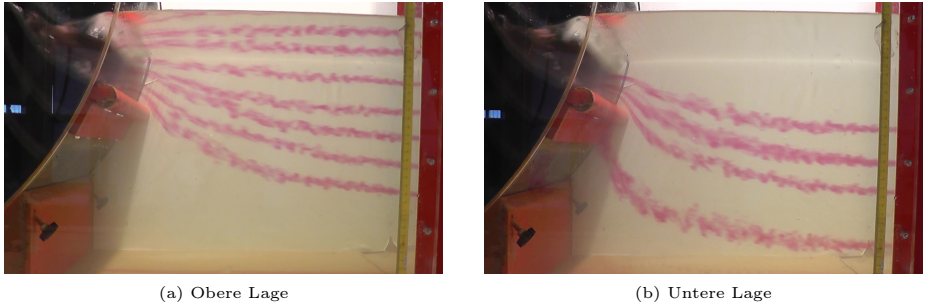


Abb. 5.12: Vorlaufbereich, Farbfäden, Mittelachse

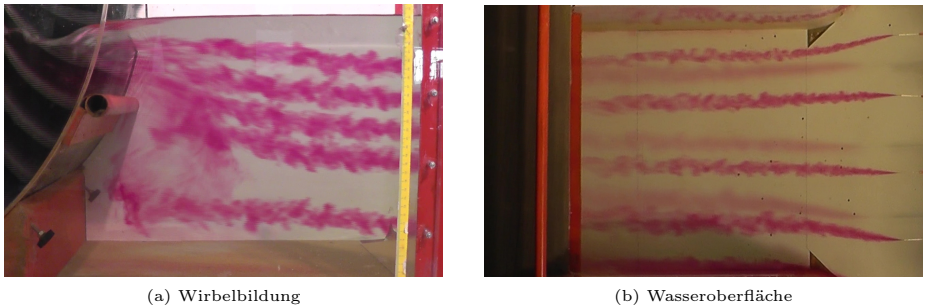


Abb. 5.13: Vorlaufbereich, Farbfäden

Man erkennt einen deutlich ausgebildeten, vertikalen Wirbel, der sich aufwärts hin zur Eintrittsöffnung schraubt. Dieser Wirbel ist in beiden äußeren Schnittebenen vorhanden, so dass die Strömung außerhalb der Mittelebene vor dem Wasserrad ausgeprägt dreidimensional ist. Nur unmittelbar unter der Wasseroberfläche verbleibt die Strömung hingegen in ihrer Ebene (Abbildung 5.13b).

Zusätzlich zur visuellen Strömungsuntersuchung anhand von Farbfadenverläufen wurde das Geschwindigkeitsfeld in der Mittelachse y_02 mit Hilfe einer ADV-Sonde aufgemessen (vgl. Abschnitt 4.2.3). In Abbildung 5.14 ist es für ausgewählte Schnitte abgebildet (Schnittebenen s. Abbildung 4.14) und gleichzeitig der Geschwindigkeitsverteilung der reinen Schützüberströmung gegenübergestellt (siehe auch Abschnitt 4.2.3). Das Geschwindigkeitsprofil beim Wasserrad ist im Hinblick auf seine x -Komponente (Abbildungen 5.14a bis 5.14d) weitestgehend analog zu demjenigen der Schützüberströmung. Lediglich unmittelbar vor dem Wasserrad ist die Strömung im oberen Bereich geringfügig schneller als bei reiner Schützüberströmung (Abbildung 5.14d). Dies hängt mit dem sich verringenden Durchflussquerschnitt zwischen Schützoberkante und Wasseroberfläche zusammen. Wie auch bei der Schützüberströmung er-

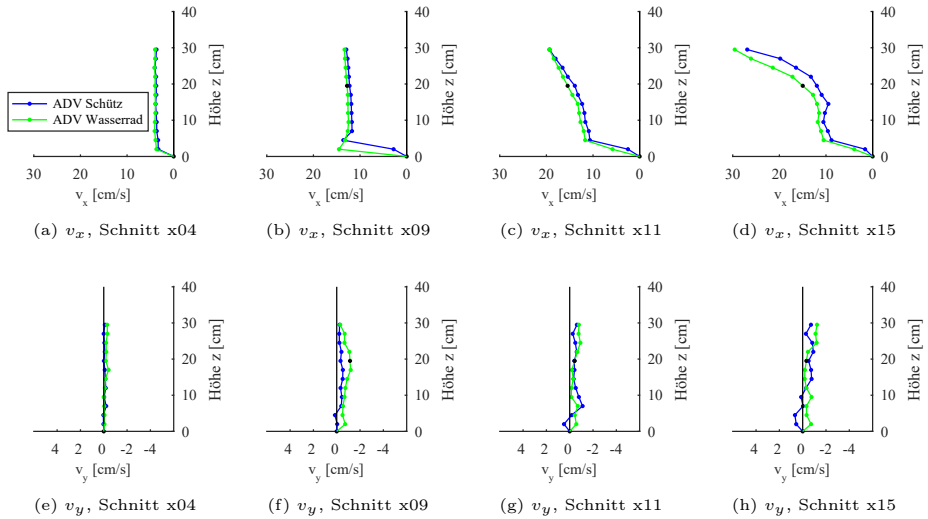


Abb. 5.14: Geschwindigkeitsverteilung Wasserrad (grün) u. Schütz (blau), Achse y02

fährt die horizontale Geschwindigkeitskomponente v_y in der mittleren Achse y02 nahezu keine Ablenkung, so dass die Strömung in der Mittelebene als eben betrachtet werden kann (vgl. Abbildungen 5.14e bis 5.14h). Diese Eigenschaft wird bei den numerischen Untersuchungen in Abschnitt 5.3 ausgenutzt.

Eintrittsbereich. Beim Eintritt in die Schaufelräume des sich drehenden Wasserrades wird die Wasseroberfläche von den Schaufeln zerschnitten, wodurch der nun zum Oberwasser hin geöffnete Schaufelraum befüllt wird. In Abbildung 5.15 ist eine Sequenz des Füllvorganges eines Schaufelraumes abgebildet. Zum Zeitpunkt t_1 trifft die Schaufel auf die Wasseroberfläche. Dabei reißt sie an ihrer Spitze Luft mit sich, welche als kleine Wirbelwalze im Laufe der Drehbewegung sich von der Unter- auf die Oberseite des Schaufelblechs bewegt (Zeitpunkte t_2 und t_3). Während sich zum Zeitpunkt t_4 der Schaufelraum langsam befüllt, trifft bereits die Spitze der nachfolgenden Schaufel auf die Wasseroberfläche, wodurch der Füllvorgang nun mit einem Tauchstrahl fortgesetzt wird (Zeitpunkt t_5). Zum Zeitpunkt t_6 schließt dann infolge der fortschreitenden Drehbewegung die Schaufelspitze mit der Schützkrone ab, so dass der Befüllvorgang des betrachteten Schaufelraumes abgeschlossen ist.

Beobachtet man den Eintrittsvorgang (s. Abbildung 5.16) in einer Perspektive von unterhalb des Wasserspiegels, so ist die dort infolge des Auftreffens der Schaufelspitze auf die Wasseroberfläche sich zum Zeitpunkt t_1 bildende Wirbelwalze besonders gut sichtbar. Auch das Wandern der Walze von der Rückseite des Schaufelblechs (Zeitpunkt t_2) auf die Vorderseite (Zeitpunkt t_3) ist erkennbar. Im weiteren Verlauf (Zeitpunkte $t_4 - t_6$) löst sich die Wirbel-

walze dann allmählich auf und es entsteht mit dem Auftreffen der nachfolgenden Spitze auf die Wasseroberfläche eine neue Wirbelwalze. Insgesamt wird die Notwendigkeit einer guten Abstimmung von Schaufel- und Eintrittswinkel des eintretenden Wasserstrahles sichtbar (vgl. Abschnitt 5.1.3). Im Hinblick auf den Schaufelwinkel, der sich an einem möglichst bodenparallelen Geschwindigkeitsvektors beim Austritt orientiert, wird das Schütz so ausgebildet und eingestellt, dass für die vorliegende Durchflussmenge der Eintrittswinkel so ausgerichtet ist, dass der relative Geschwindigkeitsvektor möglichst parallel zum Schaufelblech verläuft. Dadurch können Stoß- und Rückschlagseffekte gering gehalten werden.

Schaufelräume. Sobald die Schaufelspitze die Schützkrone erreicht, ist der Befüllungsvorgang des Schaufelraumes abgeschlossen und das gesamte Wassergewicht im Schaufelraum übt auf das Rad ein antreibendes Drehmoment aus. In Abbildung 5.17 sind die Schaufelräume mit ihren jeweiligen Füllzuständen im Laufe der Drehbewegung vom Oberwasser zum Unterwasser abgebildet. Aus der Blickrichtung des Oberwassers (Abbildung 5.17a) sind gut die sich jeweils in einem Schaufelraum nach Ende des Befüllungsvorgangs ausbildenden horizontalen Wasserspiegellagen erkennbar. Dabei sinkt aufgrund der Spaltverluste von einem Schaufelraum zum nächsten der Wasserspiegel jeweils geringfügig. In Abbildung 5.17b sind gut die seitlichen Spaltverluste an der Plexiglasscheibe des Versuchsaufbaus erkennbar. Die horizontalen Wasserspiegellagen der einzelnen Schaufelräume erscheinen nicht mehr getrennt voneinander, sondern sind durch eine stetig, abfallende Wasserlinie miteinander verbunden.

Austrittsbereich. Beim Austritt aus dem Wasserrad kommt das aus den nun sich wieder öffnenden Schaufelräumen ausströmende Wasser in Kontakt mit dem Unterwasser. In Abbildung 5.18a ist eine nahezu optimal eingestellte Abströmungssituation am Austritt dargestellt. Beim Öffnen des Schaufelraumes, nachdem die Schaufelspitze das Kropfende im unteren Scheitelpunkt des Wasserrades passiert hat, beginnt das im Schaufelraum gehaltene Wasser aus diesem auszutreten. Im optimalen Fall ist dabei die Richtung des Geschwindigkeitsvektors des ausströmenden Wassers parallel zur Bodenebene und sein Betrag stimmt mit der Strömungsgeschwindigkeit des Unterwassers überein. In Abbildung 5.18a ist jedoch für den experimentell betrachteten Konstruktionszustand der Unterwasserstand geringfügig zu niedrig, so dass nach Öffnung des untersten Schaufelraumes das Wasser aus diesem beschleunigt abfließt. Dadurch wird ein kleiner Teil der noch nutzbaren Energie des Wassers nicht vollständig umgesetzt. Der gegenteilige Zustand ist in Abbildung 5.18b abgebildet. Bei diesem ist die Strömungsgeschwindigkeit im Unterwasser kleiner als die Geschwindigkeit des abströmenden Wassers aus den Schaufelräumen. Dadurch versuchen die Schaufeln des Wasserrades das sich unmittelbar hinter dem Wasserrad befindende Wasservolumen des Unterwassers zu beschleunigen, um Raum für das nachströmende Wasser zu schaffen, so dass es zur Wellenbildung kommt. Bei diesem Zustand wird dem Wasser bereits aus der Strömung gewonnene Energie wieder entzogen, da diese zum Verdrängen des sich unmittelbare hinter dem Wasserrad befindenden Wasservolumens aufgewendet wird. Damit ist dieser Zustand im Hinblick auf die Energieumwandlung als wesentlich nachteiliger zu betrachten als derjenige, bei der es zur Beschleunigung des ausströmenden Wassers kommt.



(a) Zeitpunkt t_1



(b) Zeitpunkt t_2



(c) Zeitpunkt t_3



(d) Zeitpunkt t_4



(e) Zeitpunkt t_5

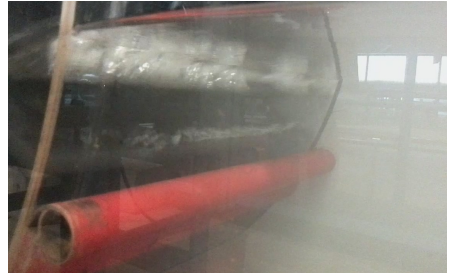


(f) Zeitpunkt t_6

Abb. 5.15: Eintrittsbereich, Ansicht oberhalb Wasserspiegellage



(a) Zeitpunkt t_1



(b) Zeitpunkt t_2



(c) Zeitpunkt t_3



(d) Zeitpunkt t_4



(e) Zeitpunkt t_5



(f) Zeitpunkt t_6

Abb. 5.16: Eintrittsbereich, Ansicht unterhalb Wasserspiegellage



(a) Blick von Oberwasser



(b) Blick von Unterwasser

Abb. 5.17: Schaufelräume mit jeweiligem Füllstand



(a) Geringfügig beschleunigte Ausströmung



(b) Verzögerte Ausströmung mit Wellenbildung

Abb. 5.18: Austrittsbereich

Abstimmung von Drehzahl und Durchfluss. Entspricht die Abstimmung von Drehzahl und Durchfluss nicht dem Auslegungszustand, so sind der Befüllungsvorgang der Schaufelräume und deren Füllzustände nicht optimal. Bei einer zu geringen Drehzahl bzw. einem zu großen Durchfluss kommt es in der Regel zur Befüllung nicht nur eines einzigen Schaufelraumes, sondern mehrerer Schaufelräume gleichzeitig. In Abbildung 5.19a ist die gleichzeitige Befüllung von vier Schaufelräumen abgebildet. Aufgrund der bereits nach kurzer Zeit erfolgten vollständigen Füllung eines Schaufelraumes mit Wasser, kommt es an den Schaufelenden zu einem Wasseraustritt in das Innere des Rades. Das in den Innenraum austretende Wasservolumen leistet keinen Beitrag zur Drehbewegung, so dass seine Energie ungenutzt bleibt. Der gegenteilige Fall eines zu geringen Durchflusses bzw. einer zu hohen Drehgeschwindigkeit ist in Abbildung 5.19b abgebildet. Hierbei bewegen sich die Schaufeln des Wasserrades schneller als das Oberwasser zuströmt, so dass die einzelnen Schaufelräume nicht vollständig gefüllt sind und so nicht das maximale Drehmoment erzielt werden kann.



(a) Übervolle Schaufelräume



(b) Untervolle Schaufelräume

Abb. 5.19: Nicht optimale Abstimmung von Drehzahl und Durchfluss

Förderbetrieb. Im Fall eines zu hohen Einstaus des Unterwassers, wie er z.B. im Hochwasserfall vorkommen kann, liegt beim Wasserrad der sog. *Förderbetrieb* vor. Hierbei wird das



Abb. 5.20: Förderbetrieb

Rad zwar aufgrund des weiterhin vorhandenen Höhenunterschiedes zwischen Ober- und Unterwasser angetrieben, jedoch nehmen, wie in Abbildung 5.20 zu sehen, die aus dem sehr hoch eingestauten Unterwasser austauchenden Schaufeln auf ihrer Rückseite wieder Wasser mit nach oben, was ein der Drehbewegung entgegen gerichtetes Drehmoment hervorruft. Dadurch kommt es zum Aufbrauchen eines Teils der bereits aus der Strömung gewonnenen Energie. Auch entleeren sich die Schaufelräume bei ihrer Aufwärtsbewegung in das Innere des Wasserrades, wodurch ein Teil des Wassers in einem Kreisprozess wieder und wieder vom Unterwasser in das Radinnere transportiert wird. Der Förderbetrieb stellt einen für das Wasserrad selbst und im Hinblick auf die Energiegewinnung äußerst ungünstigen Zustand dar, welcher jedoch nur im Hochwasserfall vorliegt.

5.3 Numerische Untersuchungen

5.3.1 Vorbemerkungen

Aufbauend auf den theoretischen Grundlagen in Abschnitt 5.1 und den Beobachtungen des begleitenden experimentellen Untersuchungsprogramms in Abschnitt 5.2 erfolgt in diesem Abschnitt die numerische Untersuchung des Wasserradmodells SWR-8. Ziel der Untersuchungen ist eine Ergänzung der durchgeführten experimentellen Untersuchungsergebnisse sowie der historischen Literaturdaten. Im Besonderen konnten bei den experimentellen Untersuchungen im Wasserrad selbst keine Messungen durchgeführt werden, so dass der Feldcharakter der numerischen Berechnungsergebnisse die Möglichkeit bietet, eingehendere Beobachtungen des Strömungsfeldes in den Schaufelzwischenräumen sowie des Druckfeldes auf den Schaufeloberflächen und entlang des Kropfes durchführen zu können. Bei der Umsetzung in das Computermodell stellen neben der komplexen Schützgeometrie (vgl. Abschnitt 4.3.2) die sehr dünnen Schaufeln mit ihrer gekrümmten Form sowie der sehr enge Kropfspalt, in dem der Übergang vom sich nicht bewegenden äußeren zum rotierenden inneren Gebiet stattfindet, eine erhebliche Herausforderung im Hinblick auf eine angemessene Diskretisierung der Geometrie zur Wiedergabe der tatsächlichen Strömungscharakteristiken dar. Die digitale Abbildung des Wasserradmodells ist die erstmalige numerische Untersuchung der Durchströmungsvorgänge in einem Wasserrad unter vollständiger Berücksichtigung der Interaktion von Wasser- und Luftphase.

Die Wasserrad-Durchströmung wird aufgrund der Interaktion von Wasser- und Luftphase beim Ein- und Austritt sowie in den Schaufelräumen als 2-Phasen-Strömung nach Abschnitt 3.3.2 beschrieben, so dass auch auftretende Vermischungsvorgänge abgebildet werden können. Eine alleinige Abbildung der Wasserphase würde den Einfluss der Luftphase beim Befüllen und Entleeren der Schaufelräume vernachlässigen und zu einem nur sehr aufwendig zu handhabenden, sich stets verändernden Berechnungsgebiet führen. Das 2-Phasen-Gebiet mit drehendem Radkörper wird diskretisiert mit der in Abschnitt 3.1.1 vorgestellten Raum-Zeit-Finite-Elemente-Methode. Dabei erfolgt die Beschreibung der Fluid-Fluid-Grenzfläche mit der in Abschnitt 3.3.2 beschriebenen *Level-Set*-Methode unter Zuhilfenahme einer regularisierten *HEAVISIDE*-Funktion. Die stetige Drehbewegung des Wasserrades wird auf dem diskretisierten Gebiet mittels der in Abschnitt 3.4.2 vorgestellten *Shear-Slip-Mesh-Update*-Methode berücksichtigt. Insgesamt kann so die Interaktion zwischen Wasser- und Luftphase mit großen Form- und Topologieänderungen sowie die starke Wechselwirkung beider Fluide mit dem drehenden Starrkörper abgebildet werden.

Angelehnt an den Konstruktionsdurchfluss des in Abschnitt 5.1.2 beschriebenen Hochleistungswasserrades wird für das Wasserradmodell der Zustand mit einem Durchfluss von $21.81/(s\,m)$ bei einer Umdrehungszahl von $1\,U/min$ mit einem Oberwasserstand von $37\,cm$ und einem Unterwasser-Einstau von $11\,cm$ numerisch untersucht. Neben der Betrachtung dieses Betriebszustandes in Abschnitt 5.3.3 schließen sich in Abschnitt 5.3.4 als außergewöhnliche Zustände die Untersuchung der Überfüllung der Schaufelräume sowie des Betriebs im Hochwasserfall an. Zuerst erfolgt jedoch in Abschnitt 5.3.2 die Beschreibung des Berechnungsgebietes und seiner Diskretisierung.

5.3.2 Berechnungsbeispiel

Gebiet. Das Berechnungsgebiet der in diesem Abschnitt näher untersuchten Wasserrad-Durchströmung stellt die Nachbildung der Mittelachse (Messachse y02) der in Abschnitt 5.2 durchgeführten experimentellen Untersuchungen dar und ist dadurch auch gleichzeitig eine Erweiterung desjenigen Gebietes, das der Schützüberströmung in Abschnitt 4.3 zugrunde liegt. In Abbildung 5.21 ist das in Vor- und Nachlaufgebiet sowie dem unmittelbaren Wasserradbereich unterteilte Berechnungsgebiet mit Anfangs- und Randbedingungen skizziert. Das

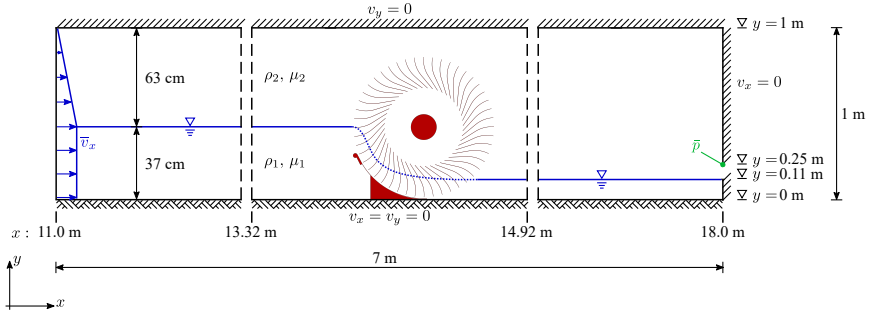


Abb. 5.21: Berechnungsgebiet mit Rand- und Anfangsbedingungen

Berechnungsgebiet hat in der Längsrichtung als Hauptströmungsrichtung eine Ausdehnung von $11,0\text{ m} \leq x \leq 18,0\text{ m}$ und erstreckt sich in vertikaler Richtung von $0,0\text{ m} \leq y \leq 1,0\text{ m}$. Die Ausdehnungen des Gesamtgebietes sind wie auch in Abschnitt 4.3 so gewählt, dass Vor- und Nachlaufbereich keinen Einfluss auf die Strömungsgeschehnisse am Wasserrad haben und gleichzeitig das Berechnungsgebiet nicht unnötig groß wird. Das sich in etwa der Mitte des Berechnungsgebietes befindende Wasserrad ist die digitale Umsetzung des in Abschnitt 5.2 vorgestellten und für die experimentellen Untersuchungen verwendeten Modells des SWR-8 im Maßstab 1:10 mit 48 Schaufeln und einem Durchmesser von 80 cm. Der Drehpunkt der Wasserradwelle liegt bei $(x, y) = (14,1222\text{ m}, 0,4284\text{ m})$, während die Koordinaten des Schützes unverändert Abschnitt 4.3.2 zu entnehmen sind. Lediglich die Oberkante des Schützes ist um 4 cm auf eine Höhe von $y = 26\text{ cm}$ abgesenkt worden (Schützstellung OK-26). Dies berücksichtigt den zusätzlichen Strömungswiderstand des Wasserrades, so dass bei gleicher Durchflussmenge wie in Abschnitt 4.3 die Wasserspiegellage des Oberwassers weiterhin konstant bei $y = 37\text{ cm}$ bleibt. Abweichend vom Experimentalmodell wurde für die numerischen Untersuchungen der Kropfspalt von 4 mm auf 8 mm vergrößert, um die Netzbewegung mit der in Abschnitt 3.4.2 beschriebenen SSMUM durchführen zu können. Ebenso wurde die spitz zulaufende Schaufelvorderkante orthogonal gekappt, um eine die Netzbewegung ermöglichende Vernetzung insbesondere im Kropfbereich herzustellen. Im Hinblick auf die Netzbewegung und die Vernetzung der komplexen Wasserradgeometrie wurde der Nahbereich des Wasserrades ($13,32\text{ m} \leq x \leq 14,92\text{ m}$), wie in Abbildung 5.22 dargestellt, in unterschiedliche Teilbereiche untergliedert. Der Radinnenraumbereich ist zusammen mit dem Schaufelraumgebiet (hellblau) durch das kreisförmige SSL-Gebiet (weiß) vom äußeren Strömungsgebiet (dunkelblau) getrennt. Damit kann die Drehbewegung des Wasserrades über den nur 2 mm dicken

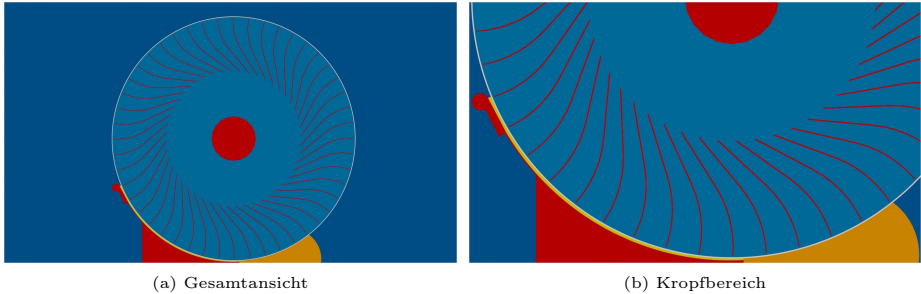


Abb. 5.22: Gebietsunterteilung der unmittelbaren Wasserradumgebung

Shear-Slip-Layer vom äußeren, sich nicht bewegenden Gebiet entkoppelt werden. Zusätzlich ist der Kropfbereich (gelb) sowie der Austrittsbereich (orange) vom äußeren Gebiet abgetrennt, um dort eine dem Strömungsgeschehen angepasste und kontrollierbare Vernetzung zu ermöglichen.

Vernetzung. Unter Bezug auf die in Abbildung 5.21 und Abbildung 5.22 dargestellte Gebietsunterteilung erfolgt die Vernetzung bereichsweise. Sowohl Vor- als auch Nachlaufgebiet sind strukturiert mit 15 bzw. 24 Rechteckelementen in Längsrichtung und 36 bzw. 33 Elementen in vertikaler Richtung vernetzt. Im Vorlaufgebiet beträgt die mittlere Kantenlänge 15.47 cm in Längsrichtung und 2.72 cm in vertikaler Richtung, während im Nachlaufgebiet in Längsrichtung die mittlere Elementlänge zwischen 15.81 cm und 7.14 cm variiert und in vertikaler Richtung zwischen 2.0 cm und 3.0 cm liegt. Demgegenüber erfolgt die in Abbildung 5.23 dargestellte Vernetzung des Wasserrad-Nahbereichs zwischen $13.32 \text{ m} \leq x \leq 14.92 \text{ m}$ vorwiegend unstrukturiert, berücksichtigt jedoch die in Abbildung 5.22 dargestellte Gebietsunterteilung. Während Kropf- und Austrittsbereich mit 400 bzw. 800 Rechteckelementen strukturiert vernetzt sind, ist die Vernetzung des äußeren Wasserradgebietes sowie von Radinnen- und Schaufelraumgebiet mit 3166 bzw. 4793 Elementen unstrukturiert umgesetzt. Mittels lokaler Netzverfeinerung, insbesondere an den Schaufelenden, ist sichergestellt, dass die charakteristischen Strömungsphänomene beim Ein- und Ausströmen sowie im Schaufelraum abgebildet werden. Der das sich drehende Radinnengebiet vom sich nicht bewegenden Außengebiet trennende kreisringförmige *Shear-Slip-Layer* ist mit 510 Elementen in Umfangsrichtung und einem Element in radialer Richtung diskretisiert. Dadurch liegt das Seitenverhältnis der SSL-Elemente mit 4.0 im Hinblick auf die bei der Netzbewegung planmäßig auftretenden Verzerrungen im noch akzeptablen Bereich. Sowohl im ruhenden Außen- als auch im drehenden Innengebiet liegt eine lokale Netzverfeinerung in Richtung des *Shear-Slip-Layers* vor. Aufgrund der lokal begrenzten Netzverfeinerung ist es möglich, das diskretisierte Gesamtgebiet auf 11 001 Elemente mit 12 159 Knoten zu beschränken, so dass in jedem Zeitschritt ein nichtlineares Gleichungssystem mit 97 272 Unbekannten iterativ zu lösen ist. Mit 5976 Knoten stellt hierbei das Radinnengebiet den Hauptteil an Unbekannten. Wie bei der in Abschnitt 4.3 betrachteten Schützüberströmung werden auch hier zur Diskretisierung die in Abschnitt 3.3.2

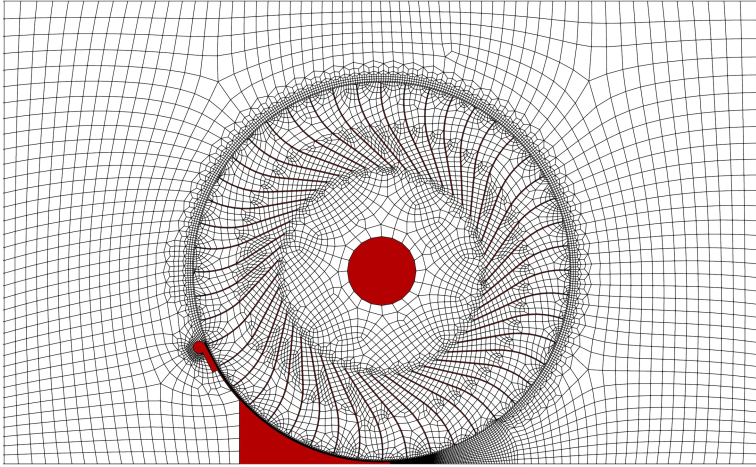


Abb. 5.23: Vernetzung Nahbereich Wasserrad ($13.32 \text{ m} \leq x \leq 14.92 \text{ m}$)

beschriebenen Q1Q1-Elemente mit 4 Knoten und gekoppelter *Level-Set*-Gleichung verwendet. Die Diskretisierung des Zeitbereichs ist mit einer Zeitschrittweite von $\Delta t = 0.0392 \text{ s}$ umgesetzt. Dabei erfolgt nach jedem Zeitschritt die Reinitialisierung der *Level-Set*-Funktion und nach jedem dritten Zeitschritt findet die Rekonnectierung der SSMUM statt. Insgesamt führt die SSMUM zu einer Kopplung von räumlicher und zeitlicher Diskretisierung über die Geometrie der SSL-Elemente in Verbindung mit der Drehgeschwindigkeit und der Zeitschrittweite. Vorteilhaft im Hinblick auf das Verzerrungsvermögen sind hierbei hohe, schlanke Elemente, die jedoch sowohl einen entsprechenden Raumbedarf haben als auch zu geringeren Zeitschrittweiten führen. Insbesondere stellt der sehr enge Kropfspalt eine wesentliche Einschränkung im Hinblick auf die geometrische Ausbildung der SSL-Elemente dar. Das Zusammenspiel aus sowohl die Geometrie als auch das erwartete Strömungsgeschehen berücksichtigender Gebietsunterteilung sowie lokaler Netzverfeinerung lässt die in Abbildung 5.24 dargestellte Elementqualität zu. Für die skalierte Determinante der Element-JAKOBI-Matrix $\det(\mathbf{J})$ zeigt sich (Abbildung 5.24a), dass der Großteil der Elemente nur wenig vom Idealwert abweicht. Jedoch sind die Elemente der lokalen Netzverfeinerung im Außengebiet des SSL sowie einige einzelne Elemente im vom SSL umschlossenen Bereich, insbesondere im Bereich der Schaufelenden, stärker verzerrt, bleiben aber weiterhin im noch zulässigen Bereich. Entsprechendes ist für die Konditionszahl der Element-JAKOBI-Matrix $\text{cond}(\mathbf{J})$ in Abbildung 5.24b zu beobachten. Im Wesentlichen sind die Bereiche mit sich verändernder Netzdichte betroffen. Dennoch verbleibt auch hier der Großteil der Elemente im zulässigen Bereich und nur einzelne Elemente erreichen den Grenzwert. Somit treten sowohl bei der Lösungsübertragung vom lokalen auf das globale Berechnungsgebiet als auch im Hinblick auf die Lösungsempfindlichkeit des Gesamtsystems keine Beeinträchtigungen auf. Insgesamt zeigt sich, dass die Unterteilung des Gesamtgebietes in Untergebiete sinnvoll und notwendig ist, um eine angepasste Vernetzung mit noch annehmbarer Knotenanzahl bei gleichzeitig akzeptabler Elementqualität zu

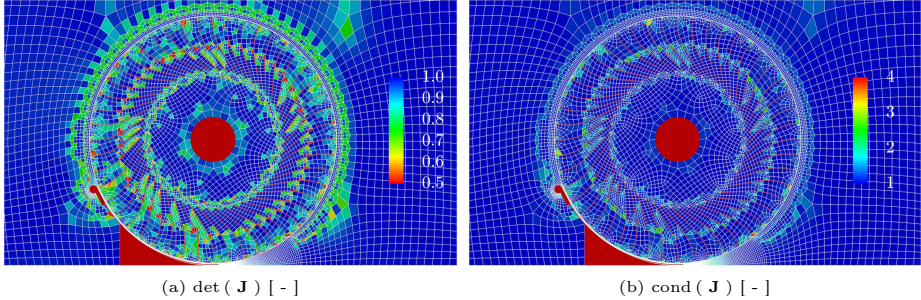


Abb. 5.24: Netzqualität Nahbereich Wasserrad

erzielen. Jedoch weist die Auswertung der Elementqualitätskriterien bereits darauf hin, dass eine umfangreichere Gebietsunterteilung sinnvoll wäre, um nicht die Grenzbereiche der Qualitätskriterien zu erreichen. Daher ist eine weitergehende Gebietsunterteilung mit angepasster Vernetzung erarbeitet worden, jedoch konnte diese aus Zeitgründen im Rahmen dieser Arbeit nicht für weitergehende Berechnungen verwendet werden.

Netzbewegung. Zur Berücksichtigung des sich stetig drehendes Wasserrades kommt die in Abschnitt 3.4.2 beschriebene *Shear-Slip-Mesh-Update-Methode* zum Einsatz. Dabei wird das Gesamtgebiet in ein sich nicht bewegendes Außengebiet und ein sich starr mit dem Körper mitbewegendes Innengebiet unterteilt. Beide Gebiete sind über den *Shear-Slip-Layer* miteinander verbunden, der in radialer Richtung nur aus einer Elementschicht besteht. Die Knoten der Elemente des SSL gehören auf der einen Seite zum sich mitbewegenden Innengebiet und auf der anderen Seite zum in Ruhe verbleibenden Außengebiet, so dass sich die Elemente mit fortschreitender Bewegung des Körpers verzerren. In Abbildung 5.25a ist ein Ausschnitt des nur 2 mm starken *Shear-Slip-Layers* in seinem Ausgangszustand dargestellt, während in Abbildung 5.25b die Elemente in ihrem maximalen Verzerrungszustand zu sehen sind. Im Übergang zur nächsten Zeitscheibe erfolgt ein Konnektivitätswechsel der innenliegenden Knoten und im Hinblick auf die Verzerrung liegt wieder der Ausgangszustand von Abbildung 5.25a vor. Der Konnektivitätswechsel erfolgt im Rahmen der hier vorgestellten Berechnungen nach jedem dritten Zeitschritt, so dass eine größtmögliche Kontrolle der Elementverzerrung besteht.

Rand- und Anfangsbedingungen. Das gesamte Berechnungsgebiet wird im unteren Bereich von einer Wasserphase ($\rho_1 = 1000 \text{ kg/m}^3$, $\mu_1 = 1 \times 10^{-3} \text{ (Ns)/m}$) belegt, oberhalb der sich eine Luftphase ($\rho_2 = 910 \text{ kg/m}^3$, $\mu_2 = 108 \times 10^{-3} \text{ (Ns)/m}$) befindet. Die gemeinsame Grenzfläche beider Phasen liegt bei $y_{\text{int.}} = 37 \text{ cm}$, in deren Umgebung der stetige Übergang mittels einer regularisierten HEAVISIDE-Funktion von einer Fluidphase in die andere erfolgt. Der Übergangsbereich beträgt 2 cm und erstreckt sich symmetrisch in beide Fluidgebiete. Beide Fluidphasen unterliegen einer vertikal wirkenden Erdbeschleunigung von $g = 10 \text{ N/kg}$. In Abbildung 5.21 sind neben dem Ausgangszustand mit einem Oberwasserstand von 37 cm und

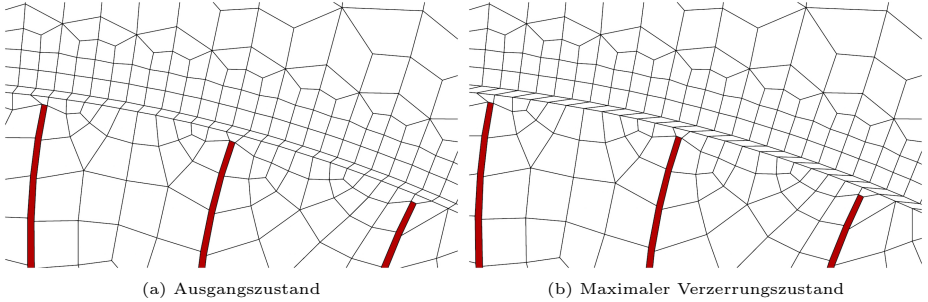


Abb. 5.25: Netzbewegung

einem Unterwasserstand von 11 cm auch die zugehörigen Randbedingungen eingetragen. Von einem ruhenden Zustand aus wird die Strömung kontinuierlich angefahren, bis bei $t = 5$ s eine mittlere Strömungsgeschwindigkeit am Einströmrand von $\bar{v}_x = 6$ cm/s erreicht wird und für deren Verteilung mit $y_{\max.} = 1.0$ m gilt:

$$v_x = \begin{cases} \bar{v}_x & \forall \quad y \leq y_{\text{int.}} \quad (\text{Wasserphase}) \\ \bar{v}_x \cdot \frac{1 - y}{y_{\max.} - y_{\text{int.}}} & \forall \quad y > y_{\text{int.}} \quad (\text{Luftphase}) \end{cases} \quad (5.13)$$

Die Einströmung beider Fluide erfolgt dabei ausschließlich horizontal, so dass am Einströmrand $\bar{v}_y = 0$ gilt. Sowohl am gesamten unteren Rand als auch auf allen Oberflächen des Wasserrades inklusive Schütz und Kropf gelten *no-slip*-Randbedingungen, während am oberen und rechten Rand *slip*- Randbedingungen gesetzt sind. Die Abfluss aus dem Berechnungsgebiet erfolgt über eine kleine Öffnung am rechten Rand ($11.0 \text{ cm} \leq y \leq 25.0 \text{ cm}$), an deren oberem Ende das Druckniveau mit $\bar{p} = 0$ gesetzt ist. Während der gesamten Berechnung dreht sich das Wasserrad konstant mit einer Umdrehungsgeschwindigkeit von $\omega = 0.1047$ 1/s, was 1 U/min beim Wasserradmodell aus Abschnitt 5.2.2 entspricht. Nach Abschluss der Berechnung einer Zeitscheibe erfolgt die Reinitialisierung der *Level-Set*-Funktion.

Parametersatz. Wie auch bereits bei der Schützüberströmung in Abschnitt 4.3 orientieren sich die gewählten physikalischen Parameter an den begleitenden experimentellen Untersuchungen (vgl. Abschnitt 5.2.3) und zielen darauf ab, das dort beobachtete Strömungsverhalten numerisch abzubilden. Die physikalischen Parameter können über die densimetrische FROUDE-Zahl am Einströmrand zur Kennzeichnung des Berechnungsbeispiels zusammengefasst werden. Mit der Wassertiefe am Einströmrand von $h = 37$ cm und der Dichtedifferenz $\Delta\rho = \rho_1 - \rho_2$ gilt

$$\text{Fr}_{\text{den}} = \frac{\bar{v}_x}{\sqrt{\frac{\Delta\rho}{\rho_1} g h}} = 0.23, \quad (5.14)$$

so dass eine Vergleichbarkeit der Berechnungen zur Schützüberströmung in Abschnitt 4.3.2 gegeben ist.

5.3.3 Betriebszustand

Gesamtbetrachtung. Im Betriebszustand (Zustandsangaben und Randbedingungen siehe Abschnitt 5.3.2) stellt sich der in Abbildung 5.26 dargestellte stationäre Strömungszustand im Wasserrad ein. Deutlich sichtbar ist die Nutzbarmachung der potentiellen Strömungsener-

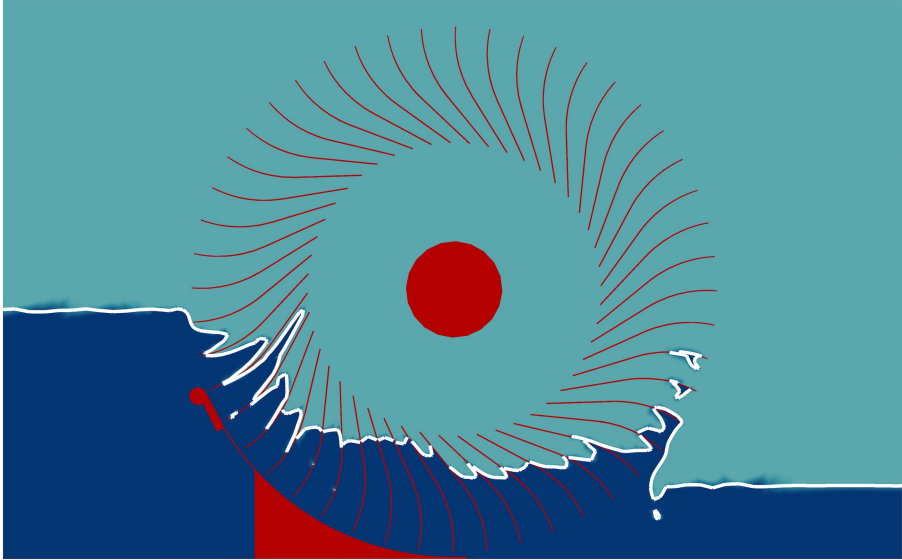


Abb. 5.26: Betriebszustand, Fluidphasen

gie durch Abbau der Höhendifferenz zwischen Ober- und Unterwasser entlang der einzelnen Schaufelräume. Im Eintrittsbereich sind die in Abhängigkeit des Drehwinkels unterschiedlichen Strömungszustände bei der Befüllung erkennbar. Nach dem Auftreffen der Schaufel auf den Oberwasserspiegel verdrängt die Schaufelspitze das sich unter ihr befindende Wasservolumen und lenkt es zuerst in den sich unter ihr gelegenen sowie mit fortschreitender Drehbewegung auch in den sich über ihr befindenden Schaufelraum. So kommt es zur Befüllung eines Schaufelraumes, bei dem die ursprünglich in ihm enthaltene Luft von dem einströmenden Wasservolumen verdrängt wird. Der Füllvorgang setzt sich solange fort, bis die Spitze der oberen Schaufel eines Schaufelraumes die Schützkrone passiert. Zum Ende des Füllvorganges ist der Schaufelraum maximal mit Wasser gefüllt und die Spitze des eingetretenen und beruhigten Wasserstrahls liegt höhengleich mit dem Oberwasserstand. Nach Passieren der Schützkrone ist der Schaufelraum durch den Kropf vom Oberwasser getrennt und das eingetretene Wasservolumen beruhigt sich unter Ausbildung eines horizontalen Wasserspiegels und folgt nun der Drehbewegung des Wasserrades. Dabei sinkt mit zunehmendem Drehwinkel der Wasserspiegel im Schaufelraum ab, da sowohl aufgrund der horizontalen Wasserspiegellage das Volumen eines Schaufelraumes drehwinkelabhängig ist als auch es zu Wasserverlusten über den Kropfspalt

kommt. Im tiefsten Punkt der Drehbewegung endet der Kropf, der Schaufelraum beginnt sich zum Unterwasser hin zu öffnen und die Entleerung beginnt. Für den berechneten Zustand liegt der Wasserspiegel beim Öffnen eines Schaufelraumes etwas oberhalb des Unterwasserspiegels, so dass nach Abschnitt 5.1.3 die Drehgeschwindigkeit des Rades noch gesteigert werden könnte. Dennoch scheint die Tauchung des Wasserrades in das Unterwasser etwas zu tief zu sein, da beim Austauschen der Schaufeln Wasser auf der Schaufelrückseite mit nach oben genommen wird, welches während der Aufwärtsbewegung dann zurück in das Unterwasser abtropft.

Strömungsfelder. Eine eingehendere Analyse des stationären Betriebszustandes gelingt durch die Betrachtung der Strömungsfelder für Geschwindigkeit und Wirbelstärke in Abbildung 5.27 und der Druckfelder in Abbildung 5.28. Bei Betrachtung des Geschwindigkeitsfeldes

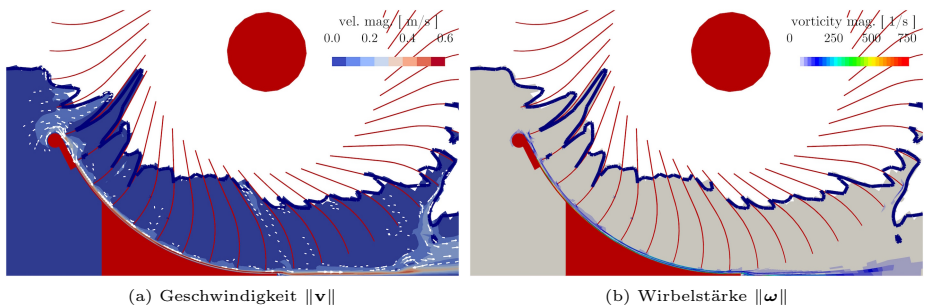


Abb. 5.27: Betriebszustand, Strömungsfeld

in Abbildung 5.27a ist ersichtlich, dass die Strömung sowohl im Vorlaufbereich als auch in den Schaufelräumen insgesamt sehr ruhig ist. Lediglich im unmittelbaren Einströmbereich um die Schützkrone und im Kropfspalt sowie in den sich zu entleeren beginnenden Schaufelräumen und im sich direkt anschließenden Abströmgebiet sind die Strömungsgeschwindigkeiten erhöht. Im Eintrittsbereich erfolgt analog zur Schützüberströmung (vgl. Abschnitt 4.3) eine Strömungsumlenkung im Bereich der Schützkrone. Jedoch folgt nur ein kleiner Anteil der Strömung weiterhin der Schützgeometrie den Kropf entlang. Der überwiegende Teil der die Schützkrone überströmenden Wassermenge wird ein weiteres Mal von den Wasserradschaufeln umgelenkt, so dass während des Füllvorgangs die Geschwindigkeitsvektoren tangential der Schaufelgeometrie folgen. Nach Ende der Befüllung eines Schaufelraumes lösen sich die letzten Wirbel im oberen Schaufelraumbereich auf und das Wasser kommt unter Ausbildung eines horizontalen Wasserspiegels zur Ruhe, wobei es die Drehgeschwindigkeit des Rades annimmt. Aufgrund der gegenüber dem beruhigten Schaufelraum recht starken Spaltströmung treten im kropfnahen Schaufelraumbereich kleinere Wirbelbildungen auf und es entwickelt sich eine Senkströmung in den Kropfspalt. Der Betrag der aus dem Schaufelraum gerichteten Geschwindigkeit ist jedoch gegenüber demjenigen im Kropfspalt gering und findet sich deshalb in Abbildung 5.27a nur andeutungsweise wieder. Erst mit Einsetzen des Entleerungsvorganges nach Öffnung der Schaufelräume zum Unterwasser hin nehmen die Strömungsgeschwindigkei-

ten sichtbar zu, wobei nicht die Geschwindigkeitsbeträge in Kropfspalt oder Abströmbereich erreicht werden. Neben dem Geschwindigkeitsfeld zeigt sich im Wirbelfeld in Abbildung 5.27b, dass die Wirbelbildung, wie auch bereits bei der Schützüberströmung beobachtet (vgl. Abschnitt 4.3), im Wesentlichen an der Schützkrone sowie im Kropfspalt auftritt. Gegenüber der reinen Schützüberströmung ist die Wirbelbildung bei der Wasserrad-Durchströmung im Kropfspalt infolge der Verengung durch die entlanggleitenden Schaufelspitzen jedoch stärker ausgeprägt. Die Ausbreitung der im Kropfspalt entstandenen Wirbel erfolgt dann vom Kropfende aus in die Abströmung des Unterwassers. Abgesehen vom Kropfspalt und der bodennahen Grenzschicht im Abströmbereich tritt im Strömungsfeld ansonsten insbesondere im Eintrittsbereich und den Schaufelräumen keine Wirbelbildung auf.

Druckfeld. Neben Geschwindigkeits- und Wirbelfeld spiegelt sich die Strömungscharakteristik der Wasserrad-Durchströmung auch im Druckfeld wieder. In Abbildung 5.28a ist die deutlich hydrostatisch geprägte Druckverteilung im Betriebszustand zu erkennen. Geringfügige

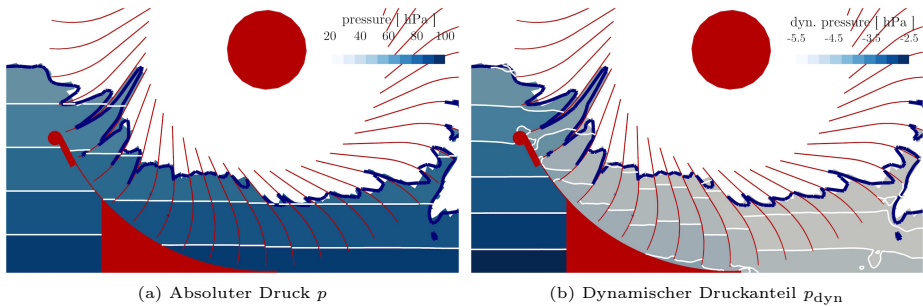


Abb. 5.28: Betriebszustand, Druckfeld

gige Abweichungen hiervon sind lediglich im Eintrittsbereich beobachtbar. In den durch den Kropf abgeschlossenen Schaufelräumen führt die geringe Drehgeschwindigkeit des Wasserrades hingegen nicht zu einer signifikanten Abweichung vom hydrostatischen Druckzustand. Auch im Austrittsbereich ist dies nicht zu beobachten. Insgesamt gibt der hydrostatisch geprägte Druckzustand den für die Auslegung eines Wasserrades zugrunde liegenden Bemessungszustand wieder (vgl. Abschnitt 5.1 und [Nue05]). Spaltet man das Druckfeld p additiv in einen hydrostatischen und einen hydrodynamischen Anteil p_{dyn} auf, so lässt sich in letzterem die Auswirkung der Strömung auf das Druckfeld quantifizieren. In Abbildung 5.28b ist im dynamischen Druckfeld eine horizontale Schichtung im Vor- und Nachlaufbereich zu beobachten, die die vom Wasserspiegel zum Boden hin vertikal zunehmende Geschwindigkeitsverteilung der Hauptströmung widerspiegelt. Betragsmäßig ist hierbei der dynamische Druckanteil im Oberwasser geringer als im Unterwasser, da im Oberwasser niedrigere Strömungsgeschwindigkeiten aufgrund der größeren Wassertiefe vorliegen. Daneben ist im Eintrittsbereich das veränderte Druckfeld während des Füllvorganges erkennbar. Eine eingehendere Betrachtung des Eintrittsbereichs findet im nachfolgenden Absatz statt. Dem Eintrittsbereich folgend stellt

sich auch in den einzelnen Schaufelräumen eine horizontal geschichtete Verteilung des dynamischen Druckanteils ein. Diese entwickelt sich aus der sich im Schaufelraum bildenden Nebenströmung infolge der Wasserverluste in den Kropfspalt. Bei gleichem Verlustvolumenstrom ist geometriebedingt die Strömungsgeschwindigkeit in den achsnahen Schaufelraumbereichen größer, während zum Kropf hin der Schaufelraumquerschnitt deutlich zunimmt und so die Strömungsgeschwindigkeit und mit ihr der dynamische Druckanteil niedriger sind. Die eigentlich aufgrund der Drehbewegung radiale Verteilung von Strömungsgeschwindigkeit und dynamischem Druckfeld im Schaufelraum wird so überlagert. Nach Öffnung des Schaufelraumes in das Unterwasser erfolgt die ungehinderte Abströmung und die dynamische Druckverteilung im Schaufelraum gleicht sich derjenigen des Unterwassers an.

Einströmung. Mit dem Auftreffen der Schaufelunterseite auf den Wasserspiegel des Oberwassers beginnt der Füllvorgang. Er dauert an, bis die nachfolgende Schaufel eines Schaufelraumes die Schützkrone passiert und dieser dadurch nicht mehr mit dem Oberwasser verbunden ist. In Abbildung 5.29 sind für den stationären Betriebszustand Geschwindigkeits- und Wirbelstärkenfeld des Eintrittsbereiches als Detailauszug dargestellt. Es ist zu erkennen, dass im Betriebszu-

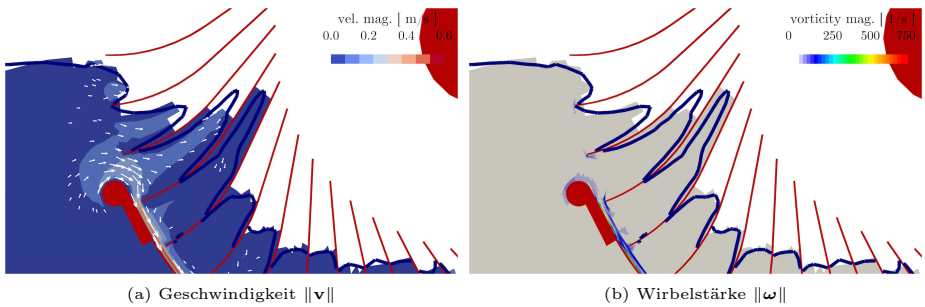


Abb. 5.29: Eintrittsbereich, Strömungsfelder

stand stets drei Schaufelräume gleichzeitig befüllt werden. Der oberste dieser drei ist noch fast vollständig mit Luft gefüllt und das Oberwasser beginnt erst gerade in ihn einzuströmen. Die Strömung ist hier noch vorwiegend horizontal aus dem Oberwasser geprägt, wobei die höchsten Strömungsgeschwindigkeiten in der Spitze des eintretenden Strahles liegen. Über die kleine Luftschicht, die sich zwischen der oberen Schaufel des Schaufelraumes und dem eintretenden Wasserstrahl befindet, übt diese eine deformierende Wirkung auf die Strahlgeometrie aus. Der Strahl beginnt im weiteren Verlauf seine Form zu verändern. Im zweiten Schaufelraum ist seine durch die Schaufelraumgeometrie und die sich abwärts bewegendenden Schaufeln veränderte Form sichtbar. Der einströmende Strahl verdrängt die sich bisher im Schaufelraum noch befindende Luft, so dass sich in ihm zwei Grenzschichten ausbilden und die höchsten Strömungsgeschwindigkeiten in der Strahlmitte liegen. Durch den weiteren Drehvorgang kommt der Schaufelraum in den Einströmbereich um die Schützkrone und die einströmende Wassermasse aus den oberen Schichten des Oberwassers wird ergänzt um solche, die aus den unteren Schichten vor dem

Schütz aufgestiegenen sind und dabei an der Schützkrone eine starke Strömungsumlenkung erfahren haben. Damit treten im dritten Schaufelraum, der schon halb durch den Kropf zum Oberwasser hin abgeschlossen ist, die höchsten Strömungsgeschwindigkeiten unmittelbar an der Schützkrone infolge der dort stattfindenden Strömungsumlenkung auf. Hier liegt auch der im Rahmen der Auslegungsberechnung angenommene theoretische Eintrittspunkt, an dem der Geschwindigkeitsvektor der Strömung bestimmt, ob eine Stoß- oder Rückschlagwirkung auf die Schaufelspitze auftritt. Ein wirklicher Abreißwirbel wie bei der Schützüberströmung bildet sich nicht aus. Nach Überströmen des Scheitelpunktes strömt der überwiegende Anteil des Füllstrahles weiter in den Schaufelraum, in dem er durch die Schaufelgeometrie erneut umgelenkt wird, so dass er die Schaufel hinaufläuft und dadurch zur Ruhe kommt. Passiert die nachfolgende Schaufel des Schaufelraumes die Schützkrone, so wird dieser vom Oberwasser abgeschlossen und der Füllvorgang endet. Die bis dahin in den Schaufelraum eingeströmte Wassermasse kommt in etwa auf Höhe des Oberwasserspiegels zur Ruhe und nimmt die Drehbewegung des Wasserrades unter Ausbildung eines horizontalen Wasserspiegels an. Neben dem Hauptfüllstrahl wird ein kleinerer Anteil des über die Schützkrone strömenden Füllstrahls soweit umgelenkt, dass er in den Kropfspalt weiterströmt, in dem im Vergleich zum übrigen Strömungsfeld sehr hohe Strömungsgeschwindigkeiten erreicht werden. Die schnelle Strömung im Kropfspalt führt in den kropfnahen Bereichen der angrenzenden Schaufelräume zur Wirbelbildung und zur Wassermithnahme aus diesen, so dass sich in den Schaufelräumen eine Verlustströmung mit sich kontinuierlich absenkender Wasserspiegellage ausbildet.

Im Hinblick auf das in Abbildung 5.29b dargestellte Wirbelfeld im Eintrittsbereich ist zu beobachten, dass der Befüllungsvorgang eines Schaufelraumes trotz der vorliegenden Strömungsumlenkungen sichtbar wirbelarm verläuft. Wie auch bereits bei der reinen Schützüberströmung (vgl. Abschnitt 4.3) befindet sich der Hauptbereich der Wirbelbildung an der Überfallkrone und entlang des Überfallrückens. Zusätzlich bildet sich ein kleines Wirbelgebiet an den Schaufelspitzen nach dem Eintauchen in das Oberwasser aus. Dieses stellt den in Abschnitt 5.2.3 experimentell beobachteten und in Abbildung 5.16 dargestellten Luftwirbel dar, der beim Eintauchen der Schaufelspitze entsteht. Der Luftwirbel wandert mit fortschreitender Drehbewegung von der Schaufelunterseite auf die Schaufeloberseite und löst sich letztendlich im Schaufelraum auf. Gegenüber der reinen Schützüberströmung ist beim Wasserrad die Wirbelbildung entlang des Schützrückens intensiviert, da die Schaufelspitzen sich sehr dicht am Kropf entlangbewegen und zusätzlich selbst noch für Wirbelbildung sorgen.

Wie bereits im vorausgegangenen Absatz bei der Gesamtbetrachtung des Druckfeldes angemerkt, ist das absolute Druckfeld stark hydrostatisch geprägt und die Strömungsauswirkungen sind vorwiegend im dynamischen Druckanteil p_{dyn} im Eintrittsbereich beim Eintauchen der Schaufeln in das Oberwasser und während des Füllvorganges der Schaufelräume bis zur Beruhigung zu beobachten. In Abbildung 5.30 ist das dynamische Druckfeld des Eintrittsbereichs für eine Periode im Detail dargestellt. Die Periode erstreckt sich vom Zeitpunkt t_1 , in dem die vorausseilende Schaufel eines Schaufelraumes den Kropfanfang passiert, bis hin zum Zeitpunkt t_6 , in dem die nacheilende Schaufel sich nun auch am Kropfanfang befindet und damit den Schaufelraum vom Oberwasser abschließt. Während der betrachteten Periode lassen sich im Eintrittsbereich am Kropf und auf der Schaufelober- und -unterseite drei wesentliche Bereiche im dynamischen Druckfeld identifizieren. In dem noch vollständig zum Oberwasser hin geöffneten Schaufelraum setzt sich die horizontale Druckschichtung vor-

erst weiter fort. Im oberen Schaufelraumbereich liegen wie auch im Oberwasser größere Strömungsgeschwindigkeiten und damit ein betragsmäßig größerer dynamischer Druckanteil vor. Demgegenüber sind die Strömungsgeschwindigkeiten im unteren Schaufelraumbereich und insbesondere auf der Schaufeloberseite geringer, so dass dort ein Bereich mit ebenfalls geringen dynamischen Druckbeträgen vorliegt (Zeitpunkt t_1 und t_2). Mit weiter fortschreitender Drehbewegung verringert sich der Verbindungsquerschnitt des Schaufelraumes zum Oberwasser, so dass der bisher mit dem Oberwasser verbundene Druckbereich abgespalten wird (Zeitpunkt t_3) und sich eine Druckblase auf der Schaufeloberseite einkapselt (Zeitpunkt t_4). Infolge des sich stetig weiter verringernden Einstromquerschnittes und der fast abgeschlossenen Befüllung des Schaufelraumes kommt die in den Schaufelraum eingeströmte Wassermasse zur Ruhe und nimmt die Drehgeschwindigkeit der Radbewegung an. Damit einher geht die Verkleinerung und letztendlich Auflösung der Druckblase auf der Schaufeloberseite (Zeitpunkte t_5 , t_6). Neben der Druckblase auf der Schaufeloberseite liegt unmittelbar an der Schützkrone eine kleine Unterdruckzone vor, die infolge der vorbeigleitenden Schaufelspitzen deformiert wird und sich dadurch auch noch im oberen Kropfbereich auswirkt (Zeitpunkte t_2 , t_3 und t_6). Diese Unterdruckzone (gut erkennbar im Zeitpunkt t_2) entsteht durch den sich an der Schützkrone ausbildenden Abreißwirbel, wie er auch bei der reinen Schützüberströmung vorliegt. Aufgrund der die Schützkrone sehr nah passierenden und den Kropf entlangleitenden Schaufelspitzen ist er bei der Wasserrad-Durchströmung gegenüber der reinen Schützüberströmung jedoch erheblich kleiner ausgebildet. Die die Schützkrone passierende Schaufelspitze kommt in Kontakt mit der Unterdruckzone des Abreißwirbels und beginnt diesen zu deformieren (Zeitpunkte t_1 , t_2). Mit fortgesetzter Drehbewegung spaltet sich eine Tochterblase von der Unterdruckzone ab (Zeitpunkt t_3), die mit der Schaufelspitze den Kropf hinab wandert und sich letztendlich als trennende Druckisobare zwischen zwei Schaufelräumen auflöst. Die Mutterblase der Unterdruckzone verbleibt hingegen mit der Schützkrone verbunden und vereint sich mit dem betragsgleichen Unterdruckgebiet im oberen bzw. hinteren Schaufelraum. In diesem liegen aufgrund der Querschnittsverengung höhere Strömungsgeschwindigkeiten vor, vergleichbar denjenigen an der Schützkrone (Zeitpunkt t_4). Erst wenn die Schaufelspitze die Schützkrone unmittelbar passiert, regt die sich auf der Schaufelunterseite befindende kleine Druckblase die Neubildung der Unterdruckzone an der Schützkrone an (Zeitpunkte t_5 , t_6). Diese wächst schnell an und trennt dadurch das vormals gleiche Druckniveau von Schützkrone und Schaufelraum voneinander ab (Zeitpunkt t_5). Dadurch kann der Unterdruckbereich an der Schützkrone sich neu kapseln und die ursprüngliche Mutterblase ausbilden (Zeitpunkt t_1), welche anschließend wieder von der Schaufelspitze deformiert wird (Zeitpunkt t_2). Die auf der Schaufelunterseite stark angewachsene Unterdruckblase verbindet sich mit dem betragsgleichen Gebiet im hinteren Schaufelraum und löst sich dadurch selbst auf (Zeitpunkt t_6).

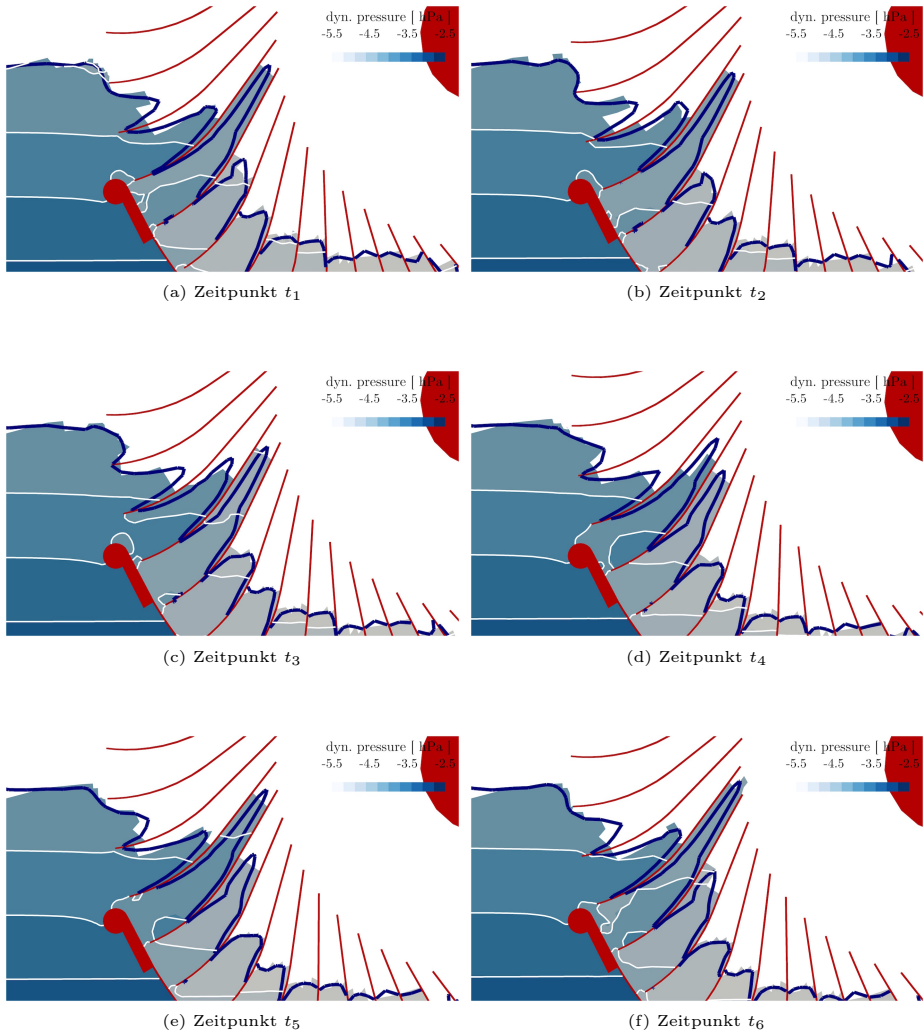


Abb. 5.30: Eintrittsbereich, dynamischer Druckanteil p_{dyn}

Ausströmung. Am Kropfende öffnet sich der Schaufelraum hin zum Unterwasser und der Entleerungsvorgang beginnt. In Abbildung 5.31 sind das zugehörige Geschwindigkeits- und Wirbelfeld dargestellt. Der Entleerungsvorgang beginnt erst langsam, erreicht aber nach voll-

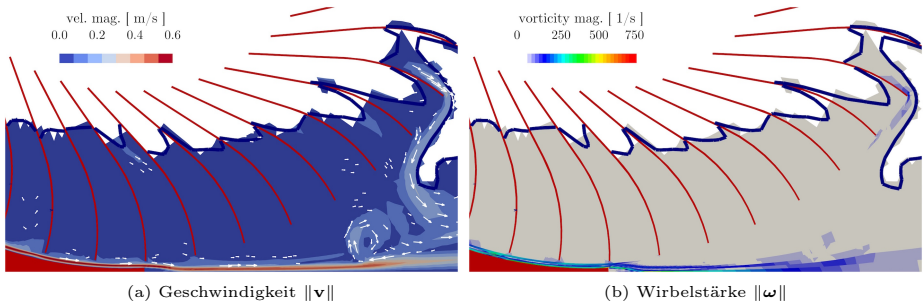


Abb. 5.31: Austrittsbereich, Strömungsfelder

ständiger Öffnung des Schaufelraumes schnell die maximalen Ausströmgeschwindigkeiten. Während des Entleerungsvorganges sinkt die Wasserspiegellage im Schaufelraum schnell auf das Niveau des Unterwassers ab. Jedoch wird sie durch die aus dem Unterwasser austauchenden Schaufeln unmittelbar wieder angehoben, da sich das Wasserrad schneller dreht als das ausgetretene Wasser im Unterwasser abströmen kann. Es kommt zu einer Mitnahme von Wasser auf den Schaufelrückseiten, welches bei fortschreitender Drehbewegung wieder von den sich aufwärts bewegenden Schaufeln abtropft. Das sog. *Hochziehen* des Wassers resultiert aus einer nicht optimalen Abstimmung von Dreh- und Abströmgeschwindigkeit und wirkt sich nachteilig auf die Energieumsetzung aus. Es zeigt sich die Maßgabe nach Abschnitt 5.1.3, dass die Verluste im Abströmbereich bei Gleichheit von Austritts- und Abströmgeschwindigkeit minimal wären. Auch die experimentellen Untersuchungen in Abschnitt 5.2.3 heben den signifikanten Einfluss der Drehzahl auf den Wirkungsgrad sowie die negativen Auswirkungen eines *Förderbetriebes* hervor. Betrachtet man das Geschwindigkeitsfeld des Austrittsbereiches in Abbildung 5.31a genauer, so lässt sich erkennen, dass auch während des Entleerungsvorganges die Strömungsgeschwindigkeiten in den Schaufelräumen gering sind und vorwiegend der Drehgeschwindigkeit des Wasserrades entsprechen. Die Geschwindigkeitsvektoren der ausströmenden Wasserpartikel setzen sich zusammen tangential aus der Dreh- und vertikal aus der Entleerungsbewegung, so dass der resultierende Geschwindigkeitsvektor in den Schaufelräumen radial auswärts gerichtet ist. Infolge des Kontaktes mit der sehr schnellen bodennahen Spaltströmung richtet sich die Ausströmung jedoch nach Verlassen der Schaufelräume bodenparallel aus, so dass der Idealfall nach Abschnitt 5.1.3 erreicht wird. Während des Entleerungsvorganges treten im Schaufelraum die höchsten Strömungsgeschwindigkeiten zu Beginn im oberen Bereich infolge der verengten Geometrie auf sowie an dem zum Unterwasser hin offenen Querschnitt über den Kontakt mit der Spaltströmung. Die im Vergleich zur Abströmgeschwindigkeit des Unterwassers etwas zu hohe Drehgeschwindigkeit des Wasserrades zeigt sich im Geschwindigkeitsfeld durch Ausbildung eines kleinen Wirbels, der zwischen den sich aufwärtsbewegenden Schaufeln, dem davon abtropfenden Wasser sowie der bodennahen Spalt-

strömung in seiner Position fixiert ist. Das insgesamt sehr ruhige Geschwindigkeitsfeld beim Entleerungsvorgang führt auch nur zu einer sehr geringen Wirbelbildung. In Abbildung 5.31b ist deutlich zu erkennen, dass vom Entleerungsvorgang selbst keine Wirbelproduktion ausgeht. Lediglich die sich bereits im Kropfspalt gebildeten Wirbel werden mit der Spaltströmung in das Unterwasser transportiert und breiten sich dort bodennah aus. Die in Abschnitt 5.1.3 beschriebene Geschwindigkeitsabhängigkeit der Wirkungsgradverluste im Austrittsbereich findet sich in den Berechnungsergebnissen wieder.

Druckverlauf auf der Schaufel. In Abbildung 5.32a ist der Verlauf des absoluten Druckes p entlang der Oberseite einer Wasserradschaufel für verschiedene Drehwinkel herausgezogen. Die zugehörigen Schaufelpositionen sind in Abbildung 5.34 skizziert. Wie auch im zugehöri-

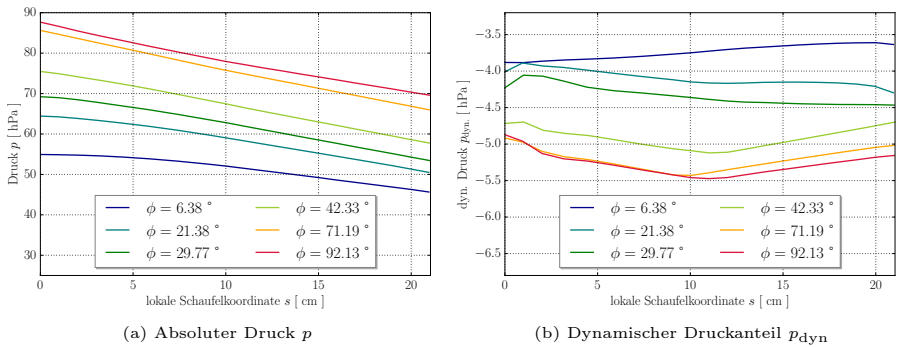


Abb. 5.32: Druckverlauf auf der Schaufel

gen Druckfeld der Strömung (vgl. Abbildung 5.28a) ist der Verlauf des absoluten Druckes auf der Schaufel für alle Positionen vom Auftreffen auf die Wasseroberfläche ($\phi = 6.38^\circ$) über das Passieren des Kropfanfanges ($\phi = 21.38^\circ$) bis hin zum Kropfende ($\phi = 92.13^\circ$) vorwiegend hydrostatisch geprägt. Der Anstieg des Druckniveaus ergibt sich dabei aus der Abwärtsbewegung der Schaufel mit zunehmendem Drehwinkel, wobei der kreisbogenförmige vordere Schaufelabschnitt die Abweichung vom linearen Verlauf entlang der lokalen Schaufelkoordinate s (Ursprung an der Schaufelspitze) bewirkt. Die oben beschriebenen Strömungsphänomene an der Schaufelspitze im Ein- und Austrittsbereich sowie entlang des Kropfes haben über den Druck p keine sichtbare Auswirkung auf die Schaufel und damit die Wasserradkonstruktion. Dies zeigt sich auch im dynamischen Anteil des Druckfeldes p_{dyn} in Abbildung 5.32b dadurch, dass je Schaufelposition mit ± 0.5 hPa nur eine mäßige Verlaufsänderung stattfindet. Das Verlaufsniveau des dynamischen Druckanteils sinkt hingegen mit zunehmendem Drehwinkel aufgrund der ansteigenden Strömungsgeschwindigkeit kontinuierlich ab. Die Geschwindigkeitszunahme folgt aus der Angleichung an die Drehgeschwindigkeit sowie der sich entwickelnden Verlustströmung. Die maximalen Geschwindigkeiten werden dabei in der untersten Schaufelstellung erreicht. In der obersten Position unmittelbar vor dem Auftreffen auf die Wasseroberfläche ($\phi = 6.38^\circ$) ist die Schaufel noch in der Luftphase, so dass der dynamische Druckanteil gering

ist. Die zwischen Wasseroberfläche und Schaufel an der Spitze vorbeiströmende verdrängte Luft führt dort zu einem stärkeren Absinken als am Schaufelende. In den folgenden beiden Positionen ($\phi = 21.38^\circ$ und $\phi = 29.77^\circ$) findet der Befüllungsvorgang statt, so dass der dynamische Druckanteil aufgrund des einströmenden Wassers insgesamt absinkt. Die Zunahme des dynamischen Druckanteils zum Radinneren ergibt sich aus der geometriebedingten Beschleunigung der Strömung infolge der aufeinander zulaufenden Schaufelenden. Für die folgenden Schaufelstellungen ($\phi = 42.33^\circ$ ff.) ist nach der Strömungsberuhigung des Befüllungsvorganges deutlich ein betragsmäßiger Anstieg des dynamischen Druckanteils zu beobachten, der durch die Aufnahme der Drehgeschwindigkeit und die einsetzende Verlustströmung in den Kropfspalt gekennzeichnet ist. Letztere führt auch zum stärkeren Absinken des dynamischen Druckanteils im mittleren Schaufelbereich, in dem der Schaufelraum noch nicht vollständig geweitet ist, aber die Verlustströmung bereits spürbar einsetzt. Zur Schaufelspitze nimmt die Verlustströmung zwar weiter zu, jedoch weitet sich auch der Schaufelraum, so dass die Strömungsgeschwindigkeit und mit ihr der dynamische Druckanteil etwas zurückgehen.

Druckverlauf am Kropf. Für den stationären Zustand ist der Wertebereich des absoluten Druckes p entlang des Kropfes ausgelesen und in Abbildung 5.33a dargestellt. Zusätzlich ist für den Zeitpunkt t_6 (vgl. Abbildung 5.30) auch die zugehörige Verlaufskurve abgebildet. Wie

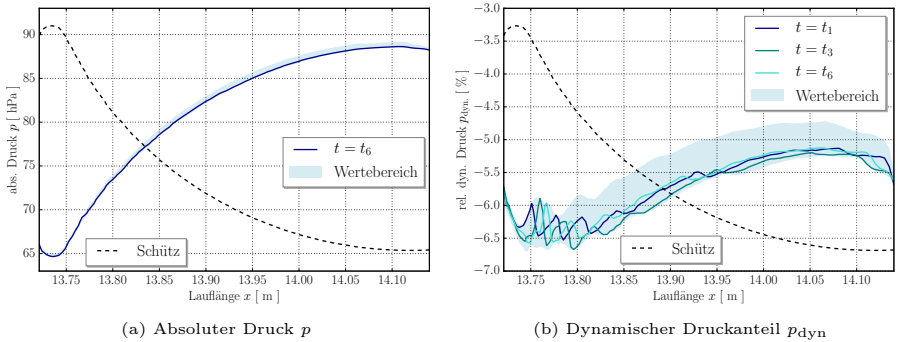


Abb. 5.33: Druckverlauf am Kropf

bereits auch bei der reinen Schützüberströmung ist der Druck entlang des Kropfes stark hydrostatisch geprägt. Die sich sehr dicht am Kropf entlang bewegenden Schaufelspitzen haben dort nur einen geringen Einfluss. Sie führen lediglich zu kleineren Druckschwankungen insbesondere am Kropfanfang, die sich dann zusammen mit der Schaufelspitze den Kropf hinab bewegen. Ab der Mitte des Kropfes haben sich diese Druckschwankungen bereits so stark abgebaut, dass sie in der Verlaufskurve nur noch schwer auszumachen sind. Gegenüber dem absoluten Druck wirken sich die Schaufelbewegungen im dynamischen Druckanteil p_{dyn} stärker aus. In Abbildung 5.33b sind für die drei Zeitpunkte t_1 , t_3 und t_6 (vgl. Abbildung 5.30) die zugehörigen Verlaufskurven des dynamischen Druckanteils entlang des Kropfes über dem Wertebereich des stationären Strömungszustandes dargestellt. Gut erkennbar ist, dass die Schaufelbewegung zu

periodischen Druckschwankungen am Kropf führen. Die den Kropf entlanggleitende Schaufelspitze verringert den Strömungsquerschnitt, so dass die Spaltströmung in der Umgebung der Schaufelspitze erheblich beschleunigt ist. Damit einher geht ein betragsmäßiger Anstieg des dynamischen Druckanteils. Zum Zeitpunkt t_1 befinden sich Schaufel- und Druckspitze am Krümmungswechsel des Kropfes beim Übergang vom konvexen zum konkaven Bereich. Die Druckspitze wandert dann getrieben von der Schaufel den Kropf hinab (Zeitpunkte t_3 und t_6). Neben der zum Zeitpunkt t_1 ersten Druckspitze im Krümmungswechsel liegen sichtbar noch zwei weitere Druckspitzen vor, die den vorauslaufenden Schaufeln zuzuordnen sind. Ab dem Zeitpunkt t_6 ist der zugehörige Schaufelraum vollständig vom Oberwasser abgeschnitten, so dass der Befüllungsvorgang beendet ist und das eingetretene Wasservolumen zur Ruhe kommt. Dadurch verringert sich unmittelbar die Intensität der Druckspitze in der direkten Umgebung der Schaufelvorderkante, so dass nach dem ersten Drittel des Kropfes die Druckschwankungen deutlich zurückgehen. Ebenfalls sinkt der dynamische Druckanteil bis kurz vor dem Kropfende ab, da nach Abschluss des Einströmvorganges nur noch die konstante Spaltströmung am Kropf anliegt. Am Kropfende machen sich bereits die Ausströmeffekte aus der Entleerung des Schaufelraumes bemerkbar, wodurch der dynamische Druckanteil wieder beginnt betragsmäßig anzusteigen.

Vergleich mit Schützüberströmung. Im Vergleich mit der reinen Schützüberströmung zeigt sich der Einfluss des Wasserrades auf die Druckverhältnisse am Überfallbauwerk. In Abbildung 5.35 ist sowohl der Verlauf des absoluten Druckes p als auch des dynamischen Druckanteils p_{dyn} entlang des Schützrückens bzw. Kropfes für den stationären Zustand dargestellt. Für den Vergleich ist der Zustand 5 des vollkommenen Überfalls aus Abschnitt 4.3.3 herangezogen. Im Hinblick auf das absolute Druckfeld zeigt sich, dass die Verläufe nahezu iden-

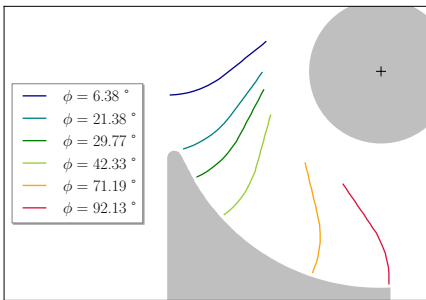


Abb. 5.34: Schaufelpositionen

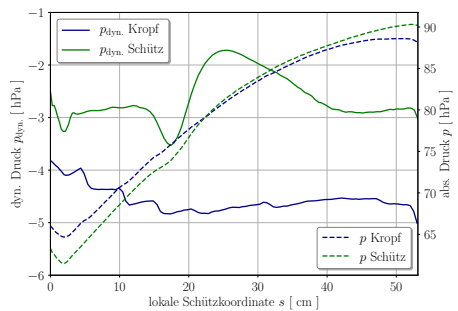


Abb. 5.35: Druckverläufe Kropf u. Schütz

tisch sind. Bei der Wasserrad-Durchströmung liegt lediglich für den Druckverlauf am Kropf bis zur Mitte des Schützrückens ein geringfügig höheres Druckniveau vor. Dies folgt aus der Absenkung der Schützkrone auf 26 cm bei der Wasserrad-Durchströmung gegenüber der reinen Schützüberströmung. Daneben treten die noch bei der reinen Schützüberströmung sichtbaren Auswirkungen von Abreiß- und Überfallwirbel entlang des Kropfes bei der Wasserrad-Durchströmung nicht mehr auf. Eine Ausbildung des Abreißwirbels erfolgt nur in geringem

Umfang, der Überfallwirbel entwickelt sich überhaupt nicht. Gegenüber den sich nur geringfügig unterscheidenden absoluten Druckverläufen lassen sich im dynamischen Druckanteil p_{dyn} hingegen deutliche Unterschiede erkennen. Neben dem bei der Wasserrad-Durchströmung allgemein etwas niedrigeren Verlaufs-niveau, das den höheren Strömungsgeschwindigkeiten im Kropfspalt Rechnung trägt, ist auch die allgemeine Verlaufscharakteristik vollständig abweichend. Die sich im dynamischen Druckverlauf auf dem Schützrücken wiederfindenden Verlaufsspitzen infolge von Abreiß- und Überfallwirbel lassen sich am Kropf nur noch ansatzweise für den Abreißwirbel identifizieren. Hingegen sind die besonders im ersten Drittel entlang des Kropfes gut sichtbaren Druckschwankungen in der Umgebung der Schaufelspitzen erkennbar. Der weitere Verlauf am Kropf ist aufgrund der konstanten Spaltströmung in etwa horizontal, während am Schütz beim vollkommenen Überfall die Strömung weiter beschleunigt, so dass der dynamische Druck nach dem Überfallwirbel betragsmäßig wieder zunimmt.

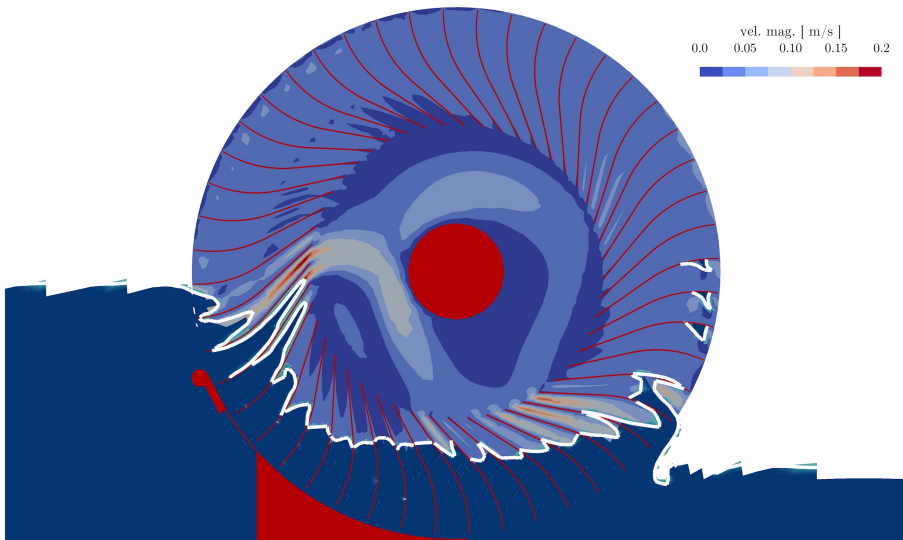


Abb. 5.36: Entlüftung Schaufelräume, Geschwindigkeitsfeld $\|\mathbf{v}\|$

Entlüftung Schaufelzwischenräume. Infolge der Modellierung und Berechnung der Wasserrad-Durchströmung als 2-Fluid-Gebiet ist neben der Strömungsanalyse des Wassergebietes auch die Betrachtung der Luftbewegung möglich. In Abbildung 5.36 ist das Geschwindigkeitsfeld der Luftphase in den Schaufelräumen und im Inneren des Wasserrades für den stationären Zustand dargestellt. Beim Füllvorgang verdrängt das einströmende Wasser die in den Schaufelräumen vorhandene Luft. Diese strömt zum Radinneren hin aus und wird dabei durch die aufeinander zulaufenden Schaufelenden deutlich beschleunigt. Die höchsten Strömungsgeschwindigkeiten der Luft liegen beim Einstromvorgang bei Wasser-Füllständen von

ca. 30 % – 50 %. Bereits ab ca. 60 % gehen die Luftgeschwindigkeiten wieder zurück. Im Radinneren wird der überwiegende Teil der aus den Schaufelräumen verdrängten Luft von der Welle nach unten hin abgelenkt und strömt zu den sich in das Unterwasser entleerenden Schaufeln. Ein kleiner Anteil umströmt die Welle jedoch oberhalb und wird erst an den gegenüberliegenden Schaufeln nach unten gelenkt. Beide Luftströme vereinen sich wieder im Bereich der sich entleerenden Schaufelräume, wo sie das durch das abströmende Wasser freiwerdende Gebiet befüllen. Wie beim Einströmvorgang liegen auch im Austrittsbereich geometriebedingt die höchsten Strömungsgeschwindigkeiten der Luft im hinteren Schaufelraumbereich und treten im Entleerungsvorgang auf, wenn der Schaufelraum nur noch mit 20 % – 30 % Wasser gefüllt ist. In allen anderen Schaufelräumen, die nicht von der Befüllung oder Entleerung betroffen sind, nimmt die Strömungsgeschwindigkeit der Luft die Drehgeschwindigkeit des Rades an.

5.3.4 Außergewöhnliche Zustände

Überfüllung der Schaufelräume. Neben dem bisher betrachteten Betriebszustand können während des Betriebs, wie in Abschnitt 5.2 angesprochen, auch außergewöhnliche Zustände auftreten. Im Wesentlichen zählt hierzu die nicht angepasste Abstimmung von Drehzahl und Durchflussmenge, so dass es zu der auch experimentell betrachteten Unter- oder Überfüllung der Schaufelräume kommt (vgl. Abbildung 5.19). In Abbildung 5.37 ist die numerische Untersuchung dieses außergewöhnlichen Zustandes unter Steigerung der Durchflussmenge bei Beibehaltung der Drehzahl dargestellt. Abweichend vom Betriebszustand liegt die Durchfluss-

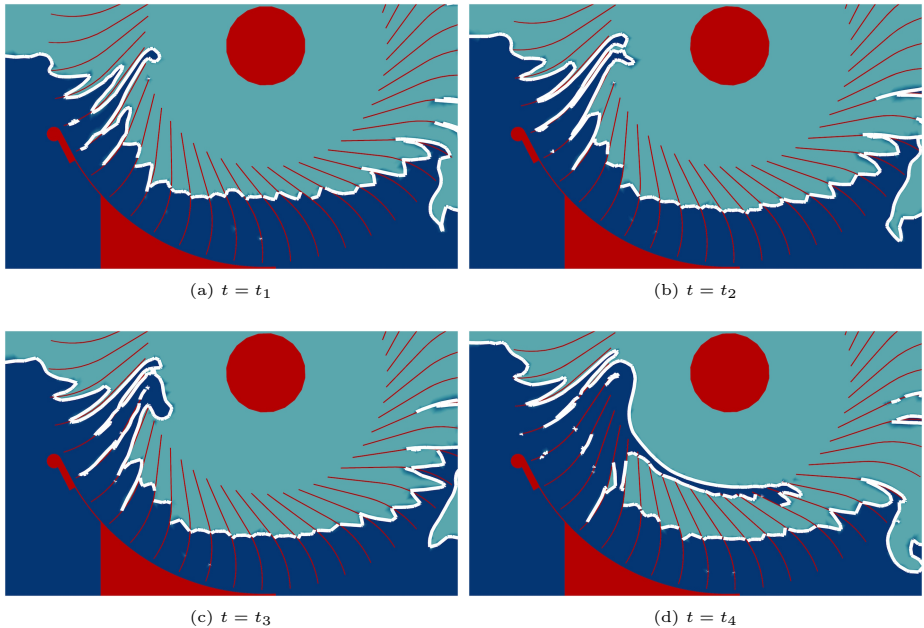


Abb. 5.37: Außergewöhnlicher Zustand, Überfüllung der Schaufelräume, Fluidphasen

menge hier 10 % höher, während die Drehzahl unverändert bleibt. Dieser Zustand kann beim Betrieb des Wasserrades auftreten, wenn im Laufe des Jahres natürliche Schwankungen im Durchfluss des Fließgewässers auftreten, die Steuerung des Wasserrades jedoch nicht adaptiv ausgelegt ist.

Das Wasserrad hat zum Zeitpunkt t_1 (Abbildung 5.37a) angefangen das Oberwassers aufzustauen, so dass der Schaufelraum am Ende des Füllvorganges bereits übertoll ist. Dabei tritt das überschüssige Wasser in den Radinnenraum über. Zu diesem Zeitpunkt ist erst nur ein Schaufelraum von der Überfüllung beeinflusst.

Im weiteren Verlauf steigt der Oberwasserspiegel weiter an, so dass zum Zeitpunkt t_2 bereits vor dem eigentlichen Ende des Füllvorganges der Schaufelraum vollständig gefüllt ist. Dadurch kommt es zur gleichzeitigen Überfüllung von zwei aufeinander folgenden Schaufelräumen (Abbildung 5.37b). Der vorausseilende hiervon ist dabei noch vollständig mit dem Oberwasser verbunden. Die Abstimmungsdiskrepanz zwischen Durchflussmenge und Drehzahl ist noch gering, so dass nur wenige Schaufelräume betroffen sind.

Mit zunehmender Zeit setzt sich der Aufstau des Oberwassers weiter fort, so dass zum Zeitpunkt t_3 (Abbildung 5.37c) der Wasserübertritt in den Radinnenraum sich deutlich verstärkt hat. Zum Zeitpunkt t_4 (Abbildung 5.37d) ist er dann so massiv, dass ein in sich geschlossener Strahl den Radinnenraum entlangläuft. Der Abstimmungsfehler zwischen Durchflussmenge und Drehzahl hat zu einem derart starken Aufstau geführt, dass der Oberwasserstand bis über die Radachse angestiegen ist. Der Wasserübertritt in den Radinnenraum findet nun auch über den Kropfspalt in eigentlich bereits vom Oberwasser abgeschlossene Schaufelräume statt. Das in den Radinnenraum eingetretene Wasser läuft über die Schaufelenden in Richtung Unterwasser. Beim Überströmen der Schaufelenden dringt es jedoch nicht in die mittleren, teilgefüllten Schaufelräume ein, da die sich dort befindenden Luft keine Möglichkeit zum Entweichen hat. Erst bei den sich entleerenden Schaufelräumen besteht die Möglichkeit zum Austritt aus dem Radinneren.

Der Zustand, in dem es zu einer Überfüllung der Schaufelräume und dadurch zu einem Wassereintritt in das Radinnere kommt, zeigt, dass ein Weiterbetrieb des Wasserrades möglich ist, aber die zur Verfügung stehende Strömungsenergie nicht vollständig umgesetzt werden kann. Die nicht umgesetzte Energie verbleibt in dem in das Radinnere eingetretenen Wasser. Hinzu kommt, dass der tatsächliche Eintrittspunkt des Wasserstrahles vom theoretischen abweicht und es so zu Stoß- oder Rückschlageffekten kommt, die den Wirkungsgrad reduzieren und sich nachteilig auf die Radkonstruktion auswirken.

Hochwasserfall. Neben der Überfüllung der Schaufelräume infolge nicht ausreichender Abstimmung von Drehzahl und Durchfluss, bei der der Betrieb des Rades jedoch fortgesetzt werden kann, stellt der Hochwasserfall einen außergewöhnlichen Zustand dar, bei dem der Betrieb mindestens stark eingeschränkt ist oder sogar vollständig zum Erliegen kommt. In Abbildung 5.38 ist der Betrieb des Wasserrades während eines Hochwasserereignisses zu sehen. Die im Hochwasserfall auftretende Durchflussmenge ist wesentlich größer als dass sie vom Wasserrad mit einer noch vertretbaren Drehzahl verarbeitet werden könnte. Es kommt wie bei der einfachen Schaufelüberfüllung zum Aufstau des Oberwassers. Im Hochwasserfall steigt jedoch der Wasserspiegel so stark an, dass er über der Radachse liegt. Das einströmende Wasser fließt durch die Schaufelräume bis in den Radinnenraum hindurch und überströmt sogar die Radachse. Die Einströmverhältnisse werden in keiner Weise mehr vom theoretischen Bemessungsvorgehen abgedeckt. Stoß- und Rückschlageffekte sind unvermeidlich. Im Austrittsbereich kommt es zum Abtransport von größeren Lufteinschlüssen, die im Radinnenraum entstanden sind. Darüber hinaus ergießt sich der über die Radachse strömende Wasserstrahl auf die gegenüberliegenden Schaufelrückseiten und erzeugt so ein der Energiegewinnung entgegenwirkendes Drehmoment.



Abb. 5.38: Außergewöhnlicher Zustand, Hochwasserfall, Fluidphasen

Insgesamt zeigt die numerische Betrachtung des Hochwasserfalls, dass ein Weiterbetrieb des Wasserrades möglich ist und die in Abschnitt 5.1.2 hervorgehobene Robustheit somit vorliegt. Dabei kommt es zwar noch zu einer Energieumsetzung, jedoch treten bereits erhebliche Wirkungsgradverluste auf, so dass ab einer Überströmung der Radachse die Einstellung des Betriebes angebracht erscheint.

5.3.5 Zusammenfassung

Die numerische Untersuchung des Wasserradmodells SWR-8 zeigt neben dem Ein- und Austrittsverhalten des Wasserstrahls beim Befüllungs- bzw. Entleerungsvorgang eines Schaufelraumes, dass im Betriebszustand eine insgesamt wirbelarme Durchströmung vorliegt. Sowohl beim Auftreffen der Schaufeln auf den Oberwasserspiegel mit dem sich anschließenden Befüllungsvorgang als auch in den Schaufelräumen während der Abwärtsbewegung in Richtung Unterwasser sowie beim Entleerungsvorgang können keine wesentlichen Wirbelbildungen beobachtet werden. Die Hauptquellen der Wirbelentstehung liegen wie auch bei der reinen Schützüberströmung an der Schützkrone sowie entlang des Schützrückens. Dabei ist entlang des Schützrückens die Wirbelproduktion in der dortigen Grenzschicht aufgrund der sehr dicht am Schütz vorbeigleitenden Schaufeln erhöht. Der Abtransport der am Schützrücken entstandenen Wirbelstrukturen erfolgt über die Kropfspaltströmung, wodurch die Wirbel bodennah ins Unterwasser transportiert werden. Gegenüber der reinen Schützüberströmung entwickelt sich nur ein sehr kleiner Abreißwirbel, der auch stets von den die Schützkrone sehr dicht passierenden Schaufelspitzen beeinflusst wird. Die Ausbildung eines Überfallwirbels ist nicht mehr möglich. Im Betriebszustand finden aufgrund der strömungsmechanisch optimierten Geometrie des SWR-8 sowohl Ein- als auch Ausströmung fast ohne Vermischung von Wasser- und Luftphase statt. Die Grenzfläche ist nahezu einfach zusammenhängend und weist in großen Abschnitten einen glatten Verlauf auf. Dennoch übt die Luftphase einen wesentlichen Einfluss auf die Wasserphase beim Befüllungs- und Entleerungsvorgang der Schaufelräume aus. Dies ist besonders beim Auftreffen der Schaufelunterseite auf den Oberwasserspiegel sichtbar.

Das Strömungsfeld kann mittels der drei Bereiche Eintritt, innerer Bereich und Austritt geeignet charakterisiert werden. Im Eintrittsbereich kommt es, nachdem der Füllstrahl bis in den hinteren Schaufelraum vorgedrungen ist und dabei umgelenkt wurde, zur Strömungsberuhigung und Angleichung an die Rotationsgeschwindigkeit des Wasserrades. Während des Füllvorganges beeinflussen die sich stets drehenden Schaufeln stark die Form des eintretenden Wasserstrahls. Der Befüllungsvorgang endet und die Beruhigung der in den Schaufelraum eingetretenen Wassermasse beginnt, wenn die nachfolgende Schaufel eines Schaufelraumes die Schützkrone passiert hat. Nach der Beruhigung haben die Wassermassen in den Schaufelräumen im inneren Bereich eine horizontale Wasserspiegellage je Schaufelraum ausgebildet und dabei die Rotationsgeschwindigkeit des Rades angenommen. Je Schaufelraum tritt eine geringe, in den Kropfspalt gerichtete spürbare Verlustströmung auf, die der Rotationsbewegung überlagert ist. Daneben kommt es im unteren Bereich des Schaufelraums, in dem er in Kontakt zum Kropfspalt steht, zur Wirbelbildung infolge der mit höherer Geschwindigkeit vorbeiströmenden Spaltströmung. Am Kropfende öffnet sich der Schaufelraum und die Wassermasse strömt wirbelarm aus ihm heraus. Die Ausströmung erfolgt zunächst radial, wird aber umgehend beim Kontakt mit der aus dem Kropfspalt mit hoher Geschwindigkeit austretenden Verlustströmung bodenparallel ausgerichtet.

Über das Druckfeld wirkt sich die Strömung auf den Kropf des Regulierschützes sowie die Schaufeln am Wasserrad aus. Entlang des Kropfes wird die Veränderung bei der Wasserrad-Durchströmung gegenüber der reinen Schützüberströmung erkennbar. Zwar ist der Verlauf des absoluten Druckes entlang des Kropfes weiterhin fast ausschließlich hydrostatisch geprägt, jedoch sind von den Schaufeln hervorgerufene Druckspitzen sichtbar, wie sie sich, getrieben von

den Schaufelvorderkanten, den Kropf hinabbewegen. Wesentlich deutlicher wird der Unterschied zwischen reiner Schützüberströmung und Wasserrad-Durchströmung entlang des Kropfes im dynamischen Druckanteil. Die nah am Kropf vorbeigleitenden Schaufeln beeinflussen das Druckfeld derart stark, dass sich an der Schützkrone nur noch ein sehr kleines Unterdruckgebiet, vergleichbar dem Abreißwirbel bei der Schützüberströmung, ausbildet. Der große Überfallwirbel kann sich hingegen nicht mehr entwickeln. Die die Schützkrone sehr dicht passierenden Schaufelspitzen beeinflussen und verändern deutlich die Form des Unterdruckgebietes. Nach dem Kontakt von Schaufelspitze und Unterdruckgebiet kommt es zur teilweisen Mitnahme und Deformation der Unterdruckblase mit anschließender Teilung und Auflösung, auf die letztendlich angeregt durch die nachfolgende Schaufel ihre Neubildung folgt. Auch auf den Schaufeloberseiten ist das Druckfeld vorwiegend hydrostatisch geprägt. Die Veränderung im absoluten Druckverlauf entlang der Schaufeln resultiert maßgeblich aus dem sich verändernden Drehwinkel. Lediglich im dynamischen Druckanteil sind beim Befüllungsvorgang im vorderen und während der Entleerung im mittleren Schaufelbereich geringfügige Auswirkungen der Strömung sichtbar.

Neben der numerischen Untersuchung des Betriebszustandes demonstriert die exemplarische Betrachtung der beiden außergewöhnlichen Zustände von Schaufelraumüberfüllung und Hochwasserfall, dass ein Betrieb des Rades auch bei solchen Parameterkonfigurationen möglich, aber mit einem von der ursprünglichen Auslegung teils deutlich abweichenden Strömungsverhalten zu rechnen ist. Die im Rahmen dieser Arbeit entwickelte numerische Methode und ihre programmtechnische Umsetzung bieten sich für die ausführliche und systematische Untersuchung solcher außergewöhnlicher Zustände als geeignetes Arbeitsmittel an, da sowohl experimentelle Untersuchungen als noch vielmehr *in situ* Betrachtungen deutlich aufwendiger bzw. nicht durchführbar wären.

Insgesamt hat die erstmalige numerische Untersuchung des stationären Strömungszustandes eines Schaufelwasserrades im regulären Betrieb die verfügbaren theoretischen und experimentellen Erkenntnisse ergänzt und erweitert. Insbesondere haben sich die in Abschnitt 5.2.3 gemachten experimentellen Beobachtungen am Ein- und Austrittsbereich sowie im inneren Bereich auch in den numerischen Berechnungen gezeigt, so dass das Berechnungsmodell als validiert angesehen werden kann. Wie bereits bei der Schützüberströmung gilt im verstärkten Maß für die numerische Untersuchung der Wasserrad-Durchströmung, dass besonderes Augenmerk auf die Geometrieerstellung mit dazugehöriger Gebietsunterteilung sowie die darauf aufbauende Diskretisierung zu legen ist. Darüber hinaus bleibt die Abstimmung von räumlicher und zeitlicher Diskretisierung auf die Strömungssituation mit ihren physikalischen Parametern sensitiv. Zusätzlich vergrößert die Verwendung der SSMUM zur Berücksichtigung der Drehbewegung des Wasserrades die gegenseitige Abhängigkeit von numerischen und physikalischen Parametern weiter. Insbesondere der Auswahl und dem Setzen von Rand- und Anfangsbedingungen kommt im Hinblick auf das Lösungsverhalten ein großer Einfluss zu. Auch der Wechsel auf ein Netzbewegungsverfahren, bei dem ruhendes und bewegtes Gebiet aneinander vorbeigleiten, wie in [Baz11] gezeigt, könnte vorteilhaft sein, um die räumliche und zeitliche Diskretisierung weniger voneinander abhängig zu machen und sie auch von der Drehgeschwindigkeit zu entkoppeln.

6 Zusammenfassung und Ausblick

6.1 Zusammenfassung

Motivation. 2-Phasen-Strömungen spielen sowohl bei der Überströmung von Verschlussorganen als auch bei der Durchströmung von Schaufelwasserrädern eine wesentliche Rolle für die Belastungsermittlung, die konstruktive Durchbildung und die Ausbildung einer wirkungsgradmaximierenden Geometrie. Die Berücksichtigung der beiden miteinander wechselwirkenden Fluidphasen ermöglicht neben der Abbildung des jeweils innerhalb einer Fluidphase vorhandenen komplexen physikalischen Verhaltens auch die Berücksichtigung der über die Grenzfläche stattfindenden Fluid-Fluid-Interaktion. Um einen umfassenderen Einblick in die genauen Strömungsverhältnisse am Schütz und im Wasserrad zu erlangen und damit die maßgebenden Effekte auf die das Strömungsgebiet begrenzende Struktur charakterisieren zu können, wurden numerische Untersuchungen auf Basis des im Rahmen dieser Arbeit entwickelten Berechnungsmodells durchgeführt.

Berechnungsmodell. Die Beschreibung der interagierenden Fluidphasen Wasser und Luft erfolgt anhand der inkompressiblen NAVIER-STOKES-Gleichungen in den primären Variablen Geschwindigkeit und Druck unter Hinzunahme einer *Level-Set*-Funktion zur Abbildung von Lage und Bewegung der beide Fluide trennenden Grenzfläche. Dabei wird der Übergang zwischen den Materialparametersätzen in der unmittelbaren Umgebung der Grenzfläche unter Verwendung einer regularisierten HEAVISIDE-Funktion stetig abgebildet. Mit Hilfe der Raum-Zeit-Finite-Elemente-Methode findet die Diskretisierung der Modellgleichungen auf dem Fluidgebiet statt, so dass die Veränderlichkeit des Strömungsgebietes implizit bei der Abbildung auf das Referenzgebiet erfasst wird und die Modellgleichungen in EULERScher Betrachtungsweise verbleiben können. Das Berechnungsmodell basiert auf einem gleichwertig um die Transportgleichung der *Level-Set*-Funktion erweiterten isoparametrischen Q1Q1-Element mit linearen Ansatzfunktionen, das von einer SUPG- und PSPG-Stabilisierung für die Impulsbilanz sowie einer GLS-Stabilisierung für die *Level-Set*-Gleichung ergänzt wird. Zusätzlich kommt die *Shear-Slip-Mesh-Update*-Methode als diskontinuierliches Netzbewegungsverfahren zur Berücksichtigung der stetigen Drehbewegung des Wasserrades zur Anwendung. Das Berechnungsmodell ist in einem objektorientierten Finite-Elemente-Programm umgesetzt, das zur Behandlung der komplexen Strömungsgeometrien bei Überfallschütz und Schaufelwasserrad von modularen Programmbibliotheken für die notwendigen Arbeiten bei Vernetzung, Visualisierung und Ergebnisauswertung im Rahmen des *Pre-* und *Postprocessings* begleitet wird. Die Verifikation wurde anhand von numerischen Testbeispielen zur Nischenströmung, der Überströmung einer Sohlschwelle sowie eines in einem 2-Phasen-Gemisch rotierenden Starrkörpers vorgenommen.

Überfallschütz. Zur Unterscheidung der im Eintritts- und Kropfbereich des Schaufelwasserrades auftretenden Phänomene erfolgte die Betrachtung der Strömungsvorgänge am vom Wasserrad losgelösten Regulierschütz mit seiner Kreisbogengeometrie. Im Rahmen der numeri-

schen Untersuchungen konnten für die Schützstellung mit einer Höhe von 30 cm (Schützstellung OK-30) und dem mit einer densimetrischen FROUDE-Zahl von $Fr_{den} = 0.23$ charakterisierten Parametersatz fünf voneinander unterscheidbare Strömungszustände identifiziert werden. Neben einem sohlschwellenähnlichen und einem rückgestauten Überfall treten mit sinkendem Unterwasserstand noch ein hoch- und ein tiefeingestauter Zustand als unvollkommene Überströmungszustände auf, bis sich letztendlich ein vollkommener Überfall ausbildet. Bei der Analyse der Wechselwirkungsvorgänge beider Fluidphasen im Bereich des Schützrückens und im angrenzenden Tosbecken tritt die Ausbildung eines Abreiß- und eines Überfallwirbels als den zwei charakteristischen Wirbelstrukturen in Erscheinung. Auch können der Schützkopf und der Schützrücken als die beiden wesentlichen Orte der Wirbelproduktion kenntlich gemacht werden. Im Druckfeld zeigt sich über dem Schützkopf und im Überfallbereich aufgrund der dort vorherrschenden hohen Strömungsgeschwindigkeiten eine signifikante Absenkung im dynamischen Druckanteil. Darüber hinaus lässt sich beim unvollkommenen Überfallzustand die Interaktion von großen Wirbelstrukturen über dem Schütz beobachten, die zum Transport von Luftblasen bis hinab zum Schützblech und somit zur Luftansammlung unter dem Überfallstrahl führt. Dies deutet darauf hin, dass das Einsetzen des Hinterlüftungsvorganges nicht nur wie bisher angenommen von den seitlichen Rändern ausgehen muss, sondern sich bei entsprechenden Zuständen auch vom inneren Bereich aus ausbreiten kann. Darüber hinaus dokumentiert die Variation des Parametersatzes im Bereich $0.07 \leq Fr_{den} \leq 0.41$ neben dem Zusammenhang zwischen der Ausbildung und Verteilung von Abreiß- und Überfallwirbel und der Gestalt und Fülligkeit des Überfallstrahls auch die Veränderung des Umschlagpunktes beim Übergang von einem unter- in einen überkritischen Fließzustand. Neben den an der Schützstellung OK-30 gemachten Beobachtungen kommt es bei Variation der Überfallhöhe in der Schützstellung OK-50 auch ohne vorliegende Hinterlüftung zu einem selbstständig initiierten Pendeln des Überfallstrahls. Dabei übernimmt der hinter dem Strahl liegende Überfallwirbel die sonst bei Hinterlüftung dem Luftpolster zufallende Regulierungs- und Verstärkerfunktion als Rückkopplungsmechanismus.

Schaufelwasserrad. Begleitend zu den von der Arbeitsgruppe Regenerative Energien am Institut für Statik der TU Braunschweig durchgeführten Arbeiten erfolgte die numerische Untersuchung des Befüllungs- und Entleerungsvorganges des Wasserradmodells SWR-8, dessen größere Variante SWR-11 beim Bau der Forschungswasserkraftanlage Bannetze/Hornbostel zum Einsatz kommt. Neben der Betrachtung des Strömungsgeschehens in der Wasserphase wurde dabei auch der Einfluss der Luftphase insbesondere bei der Be- und Entlüftung der Schaufelräume berücksichtigt. Sowohl im Ein- und Austrittsbereich als auch in den Schaufelräumen konnten wirkungsgradrelevante Verlusteinflüsse in Form von Wirbelbildungen und Strömungsumlenkungen beobachtet werden. Die Hauptquellen der Wirbelentstehung befinden sich wie auch bei der reinen Schützüberströmung an der Krone des Regulierschützes sowie entlang des Kropfes, wo die sehr dicht entlanggleitenden Schaufelspitzen die Wirbelproduktion verstärken. Ebenfalls erlauben die Schaufelspitzen an der Schützkrone nur die Ausbildung eines kleinen Abreißwirbels und verhindern die Entstehung des Überfallwirbels. Im Hinblick auf das Strömungsfeld findet im Eintrittsbereich eine Strömungsumlenkung und -beruhigung des in den Schaufelraum eintretenden Füllstrahles mit nachfolgender Angleichung an die Rotationsgeschwindigkeit des Wasserrades statt. Dabei ist die Grenzfläche nahezu einfach zusammenhängend und weist in großen Abschnitten einen glatten Verlauf auf. Dem Eintrittsbereich

nachfolgend liegt im inneren Bereich je Schaufelraum eine horizontale Wasserspiegellage vor und es tritt eine Verlustströmung im Spalt zwischen Kropf und Radschaufeln auf. Zusätzlich kommt es im kropfnahen Bereich der Schaufelräume infolge der mit höherer Geschwindigkeit vorbeifließenden Spaltströmung zur Wirbelbildung. Nach Passieren des Kropfendes öffnet sich der Schaufelraum zum Unterwasser und die Ausströmung setzt zunächst radial ein, wird aber umgehend beim Kontakt mit der Kropfspaltströmung bodenparallel ausgerichtet. Auch wenn die Ein- und Ausströmung fast ohne Vermischung von Wasser- und Luftphase verläuft, so übt die Luftphase dennoch einen wesentlichen Einfluss auf die Wasserphase beim Befüllungs- und Entleerungsvorgang der Schaufelräume aus. Im Druckfeld macht sich sowohl im Bereich der Schützkrone der stauende Einfluss des Wasserrades als auch entlang des Kropfes die Wirkung des Verluststromes im Kropfspalt bemerkbar. Besonders im dynamischen Druckanteil ist der Einfluss der sehr nah am Kropf entlangleitenden Schaufelspitzen zu erkennen, die auch das Unterdruckgebiet des kleinen Abreißwirbels an der Schützkrone beeinflussen. Insgesamt ist das Druckfeld in den Schaufelräumen vorwiegend hydrostatisch geprägt und hängt vom Drehwinkel ab. Geringfügige Abweichung treten lediglich während der Befüllung im vorderen Bereich und bei der Entleerung im mittleren Schaufelraum auf.

Experimentelles Begleitprogramm. Zur Validierung der numerischen Berechnungen und der mit ihnen gewonnen Erkenntnisse wurden begleitende experimentelle Untersuchungen durchgeführt. Diese haben darüber hinaus zu weiteren Beobachtungen geführt, die über die umsetzbare numerische Auflösung hinausgehen. Bei der Schützüberströmung konnten tiefergehende Einblicke im Hinblick auf die Initialisierung und den Vorgang der Strahlablösung gewonnen werden, welcher letztendlich zur Hinterlüftung des Überfallstrahls führt und damit der Ausgangspunkt von Wehrschwingungsphänomenen ist. Beim Wasserrad haben die experimentellen Untersuchungen besonders im Eintrittsbereich beim Auftreffen der Schaufelspitze auf die Wasseroberfläche zu einer detaillierteren Beobachtung der Interaktion von Wasser- und Luftphase geführt.

Résumé. Die durchgeführten numerischen Untersuchungen haben sowohl am Schütz als auch beim Wasserrad die Beobachtung und Analyse von charakteristischen Strömungsphänomenen ermöglicht, für die bisher keine oder nicht in dem Umfang entsprechende Daten vorhanden waren. Die gewonnenen Ergebnisse bieten neben der Möglichkeit zum vertiefenden Verständnis der auftretenden Strömungsphänomene auch einen Ansatzpunkt zur Entwicklung wirkungsgradmaximierender Strömungsgeometrien. Dabei sind weiterhin begleitende experimentelle Untersuchungen notwendig, da gegenwärtig für realitätsnahe Anwendungsfälle eine vollständige numerische Auflösung sämtlicher relevanter Skalen und Effekte nicht möglich ist.

6.2 Ausblick

Weitere Untersuchungen. Die im Rahmen dieser Arbeit durchgeführten numerischen Untersuchungen motivieren im Hinblick auf die Überströmung von Schützen und Wehren die eingehendere Betrachtung von hohen Schützstellungen ohne und mit hinterlüftetem Überfallstrahl, bei denen ein Strahlpendeln vorliegt, so dass der Rückkopplungsmechanismus im Überfallwirbel bzw. Luftpolster detaillierter analysiert werden kann. Zusätzlich ermutigt der in Abschnitt 4.3.3 betrachtete rückgestaute Zustand die Untersuchung weiterer Zustände, die einen Lufttransport hin zum Schützblech bewirken und so eine Strahlablösung mit nachfolgender Hinterlüftung initiieren können.

In Bezug auf die Untersuchung der Durchströmungsvorgänge beim Schaufelwasserrad empfiehlt sich eine an der Strukturgeometrie und den beobachteten Strömungsphänomenen orientierte optimierte Vernetzung. Hierbei ist neben der zusätzlichen Berücksichtigung komplizierter Geometriedetails wie z.B. der Schaufelspitze besonderes Augenmerk auf die Dicke des verlustdominierenden Kropfspaltes und die mit ihm verbundene wirbelerzeugende Strömung zu legen. Zusätzlich bietet eine Netzverfeinerung die Möglichkeit zu einer detaillierteren Abbildung des Interaktionsverhalten der beiden Fluidphasen sowie der daraus resultierenden Auswirkungen im Druckfeld, speziell im Eintrittsbereich. Darüber hinaus regt die eingehende Untersuchung des in dieser Arbeit behandelten Betriebszustandes die Betrachtung weiterer Betriebszustände im Rahmen einer Parameterstudie mit verschiedenen Durchflüssen, Ober- und Unterwasserständen sowie Drehzahlen an, die von transienten und außergewöhnlichen Zuständen komplettiert werden könnten. Die berechneten Strömungsfelder und Belastungsdaten bieten dann den Ausgangspunkt für eine Optimierung der vorhandenen Geometrie des Wasserrades und seiner Steuerung.

Verbesserungen Berechnungsmodell. Das konvektive Verhalten einer Strömung bewirkt eine gerichtete Informationsausbreitung, die bei Verwendung einer Finite-Elemente-Formulierung eine kontinuierliche Anpassung der Wichtungsfunktionen erfordert. Dabei kann die Anpassung an das aktuelle Strömungsfeld geeignet mit Hilfe einer Stabilisierung des Geschwindigkeitsfeldes umgesetzt werden. Die im Rahmen dieser Arbeit verwendete SUPG-Stabilisierung motiviert die Formulierung der schwachen Form im Rahmen der *Residual-Based-Variational-Multiscale*-Methode, mit der eine konsistente Herleitung der Stabilisierungsterme als Wirkung der nicht aufgelösten auf die aufgelösten Skalen vorgenommen wird [Hug95, Gra03, Gam10]. Gleichzeitig empfiehlt sich die Verwendung eines Elementes der TAYLOR-HOOD- bzw. CROUZEIX-RAVIART-Familie, so dass die BABUSHKA-BREZZI-Bedingung *a priori* eingehalten und keine Druckstabilisierung mehr notwendig ist [Don03].

Darüber hinaus bietet sich mit Verweis auf den in den letzten Jahren herausgearbeiteten Zusammenhang zwischen Finiter-Volumen-Methode und diskontinuierlichen GALERKIN-Verfahren die Verwendung einer räumlich diskontinuierlichen Formulierung zur Diskretisierung an [Car13, Ort11, Li06]. Dies würde neben der bereits vorhandenen Flexibilität und Genauigkeit auch zu einer lokalen Erhaltungseigenschaft sowie einem robusteren Verhalten führen, welches jedoch weiterhin einheitlich auf der mathematischen Theorie der Finite-Elemente-Methode aufsetzt.

In Verbindung mit der Verwendung von Simplex-Elementen lässt sich die Flexibilität im Hinblick auf die Diskretisierung der komplexen Strömungsgeometrien bei Schütz und Wasserrad weiter steigern.

Ebenfalls wäre es vorteilhaft die diskontinuierliche Netzbewegung zur Berücksichtigung der Drehbewegung des Wasserrades im Sinne eines *Sliding-Mesh*-Verfahrens umzugestalten, so dass das drehende Innennetz am ruhenden Außennetz vorbeigeleitet und damit Zeitschrittweite, räumliche Vernetzung und Drehgeschwindigkeit voneinander unabhängig gewählt werden können [Baz11, Per93]. Die dafür notwendige exakte Abbildung der Kreis- bzw. Zylinder- oder Kugelgeometrie der Gleitfläche könnte z.B. mit Hilfe von NURBS als Formfunktionen umgesetzt werden.

Im Hinblick auf die Effizienzsteigerung und Verbesserung der Erhaltungseigenschaft bei der Beschreibung der 2-Phasen-Strömung mit Hilfe der *Level-Set*-Methode hat sich gezeigt, dass besonders die Verwendung der direkten Methode zusammen mit einer Volumenkorrektur für den grenzflächennahen Bereich in Verbindung mit der *Fast Marching Methode* für den Fernbereich vorteilhaft ist [Rei16, Pas14]. Zusätzlich könnte das Geschwindigkeitsfeld in den grenzflächenfernen Bereich extrapoliert werden, da dort das tatsächliche Strömungsfeld nur eine geringe Auswirkung auf das Verhalten der Grenzfläche hat und von untergeordnetem Interesse ist. Lediglich bei der Befüllung und Entleerung der Schaufelräume bzw. im unmittelbaren Schütz- und Tosbeckenbereich hat die Luftphase entscheidenden Einfluss auf das Strömungsgeschehen und die Grenzflächendynamik. Die Extrapolation des Geschwindigkeitsfeldes in das Fernfeld der Luftphase würde zu einer erheblichen Reduzierung des Berechnungsaufwandes führen.

Erweiterungen Berechnungsmodell. Aufbauend auf den Arbeiten von ALFARRA würde es sich anbieten, dass entwickelte Berechnungsmodell um die Turbulenzmodellierung zu erweitern [Alf16, Hüb03]. Anhand des Vergleichs mit den bisherigen Berechnungsergebnissen könnte der Einfluss der Turbulenz bei der Schützüberströmung und der Durchströmung des Schaufelwasserrades quantifiziert werden. Dies würde eine Entscheidungsgrundlage bieten, wann turbulente Größen für die Belastungsermittlung zwingend zu berücksichtigen wären und wann eine Berechnung ohne turbulente Größen ausreichend ist. Im Hinblick auf die Betrachtung gekoppelter Fluid-Struktur-Phänomene, wie sie beim Schütz mit der Wehrschwingung auftreten oder es beim Wasserrad die transienten Zustände Anfahren und Bremsen sind, wäre die Hinzunahme der Strukturbeschreibung als elastischen Festkörper notwendig. Dazu bedürfte es der zusätzlichen Verwendung eines kontinuierlichen Netzbewegungsverfahrens zur Berücksichtigung der in Abhängigkeit der Strukturbewegung veränderlichen Knotenpositionen. Als geeignet hat sich hierfür die Beschreibung des Finite-Elemente-Netzes als elastische Pseudo-Struktur erwiesen [Wal02, Hüb03, Sun10, Rei16]. Alternativ wäre auch die Kopplung über ein netzfreies Gebiet möglich [Fri05, Net09]. Mit Hilfe der gekoppelten Fluid-Struktur-Beschreibung bestände die Möglichkeit, anhand von ausführlichen Parameterstudien hydroelastische Beiwerte für Schaufelwasserräder abzuleiten und damit den Berechnungsaufwand bei der konstruktiven Durchbildung erheblich zu verringern.

A Anhang

A.1 Programmtechnische Entwicklungen

Das in dieser Arbeit entwickelte Berechnungsmodell zur Beschreibung von 2-Phasen-Strömungen auf veränderlichen Gebieten ist im Finite-Elemente-Programm FEM2Flow algorithmisch umgesetzt. Es wird begleitet von Programmbibliotheken zur Datenerzeugung und zur Datenanalyse. In Abbildung A.1 sind die entwickelten Programmpakete dargestellt. Sie unterliegen alle einer *git*-Versionskontrolle und werden im Nachfolgenden in der Reihenfolge ihres Auftretens im Arbeitsablauf kurz beschrieben.

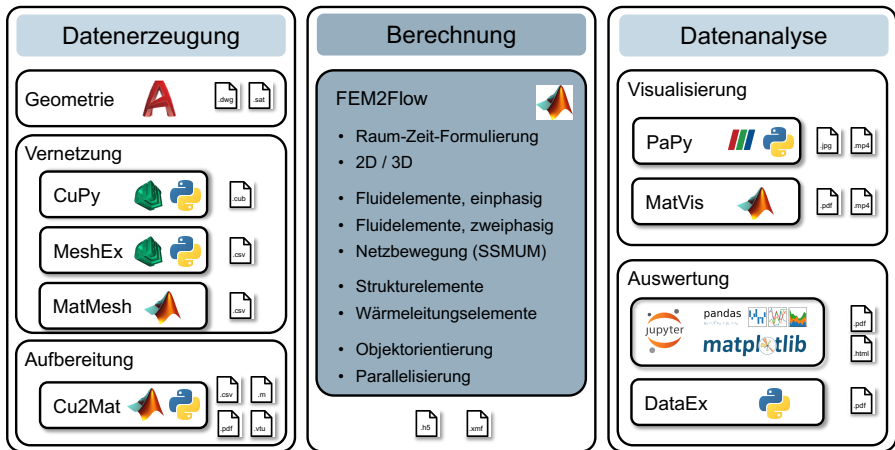


Abb. A.1: Entwickelte Programmpakete und ihr Auftreten im Arbeitsablauf

A.1.1 Datenerzeugung

Geometrieerstellung

AutoCAD. Ausgangspunkt für die numerische Untersuchung von Strömungsvorgängen ist die Erstellung der Geometrie des Berechnungsgebietes. Aufgrund der bei Schütz und Wasserrad vorliegenden komplexen Strömungsgeometrien erfolgt dies unter Verwendung des CAD-Programmsystems AutoCAD. Die erstellten Strömungsgeometrien werden im binären *sat*-Dateiformat exportiert, um sie im Anschluss mit Hilfe des Vernetzungsprogrammes CUBIT diskretisieren zu können.

Vernetzung

Die Vernetzung der Strömungsgebiete erfolgt mit Hilfe des Programmsystems CUBIT in der Version 13.2. Neben einem interaktiven Vorgehen steht auch eine Python-Schnittstelle zur Verfügung, über die die Vernetzung unter Verwendung von Skripten reproduzierbar vorgenommen werden kann. Ebenfalls können über die Schnittstelle die Daten der vernetzten Geometrie aus-gelesen und einer weiteren Nutzung zugänglich gemacht werden.

CuPy. Die modular aufgebaute Programmbibliothek CuPy ist eine in Python geschriebene *Wrapper*-Bibliothek zur Verwendung der Python-Schnittstelle von CUBIT. Sie fasst die von der Schnittstelle zur Verfügung gestellten Befehle zum Einlesen und Erzeugen der Geometrien sowie deren Vernetzung geeignet zusammen und bietet so die Möglichkeit effizient vernetzte Strömungsgeometrien zu erstellen. Zusätzlich werden Befehle und Routinen zur Überprüfung der Diskretisierung bereitgestellt. Mit Hilfe der *Wrapper*-Bibliothek CuPy ist eine reproduzier- und automatisierbare Geometrieerstellung und Vernetzung möglich. Die Übergabe der Geometriedaten aus einem CAD-Programm erfolgt anhand einer Datei im *sat*-Format, das Abspeichern der vernetzten Geometrie im von CUBIT bereitgestellten, proprietären *cub*-Dateiformat.

MeshEx. Zur weiteren Verwendung der Vernetzung ist es notwendig, die diskretisierten Geometriedaten aus dem proprietären *cub*-Dateiformat auszulesen und sie für das Finite-Elemente-Programm FEM2Flow aufzubereiten. Dazu wurde die modular aufgebaute Programmbibliothek MeshEx entwickelt, die ebenfalls eine *Wrapper*-Bibliothek zur Nutzung der Python-Schnittstelle von CUBIT ist. Sie ermöglicht unter Verwendung der *Low-Level*-Routinen der Schnittstelle das Auslesen der vernetzten Geometriedaten (Knotenkoordinaten, Inzidenzmatrix, Randbedingungen etc.) aus der *cub*-Datei und speichert diese in kontextbezogenen Dateien im quelloffenen *csv*-Format ab.

MatMesh. Alternativ zur Erstellung von komplexen Geometrien in AutoCAD und ihrer Vernetzung mittels CUBIT unter Verwendung der Python-Schnittstelle besteht mit Hilfe der in Matlab geschriebenen Programmbibliothek MatMesh die Möglichkeit, Vernetzungen für einfache Geometrien (Rechteckgebiet, Kreis o.ä.) auch direkt zu erzeugen. Unter Angabe der globalen Geometrieabmessungen und Vernetzungsparameter wird eine vernetzte Geometrie erzeugt und derart in *csv*-Dateien abgespeichert, dass sie ohne weitere Überarbeitung vom FE-Programm eingelesen werden kann.

Aufbereitung

Für die Verwendung der mit CUBIT erzeugten, vernetzten Geometriedaten als Eingabedaten des Finite-Elemente-Programmes FEM2Flow ist eine Aufbereitung im Hinblick auf die Knoten- und Elementnummerierung sowie die Anpassung der Datenstrukturen für Rand- und Anfangsbedingungen notwendig. Auch erfolgt die graphische Darstellung der Eingabedaten als Kontrollmöglichkeit.

Cu2Mat. Für die Aufbereitung und Überprüfung der Eingabedaten kommt die Programmbibliothek Cu2Mat zum Einsatz, die sowohl aus in Python als auch in Matlab geschriebenen Modulen besteht. Sie überführt die Rand- und Anfangsbedingungen in die vom Finite-Elemente-Programm FEM2Flow geforderte Struktur. Sofern eine Netzbewegung mit Hilfe der SSMUM stattfindet, wird die Knoten- und Elementnummerierung des *Shear-Slip-Layers* bereitgestellt und es findet eine Überprüfung von Netzbewegung und Konnektivitätswechsel statt. Anschließend erfolgt im Hinblick auf eine speichertechnische Optimierung die Aufbereitung der gesamten Netzgeometrie unter Verwendung des *Reverse-CUTHILL-McKEE*-Algorithmus zur Erzielung einer minimalen Bandbreite der Systemsteifigkeitsmatrix. Die überarbeiteten und optimierten vernetzten Geometriedaten werden als Eingabedaten im *csv*-Format für das Finite-Elemente-Programm FEM2Flow zur Verfügung gestellt. Zur Überprüfung der Eingabedaten werden diese sowohl graphisch direkt auf der vernetzten Geometrie dargestellt und als *pdf*-Dateien ausgegeben als auch in *vtk*-Dateien überführt, so dass unter Verwendung des Visualisierungsprogrammes ParaView eine interaktive Kontrolle mit erweiterten Ausgabefunktionen möglich ist.

A.1.2 Berechnung

Die numerische Berechnung erfolgt mit Hilfe des entwickelten Finite-Elementes-Programmes FEM2Flow. Dafür sind die in den *csv*-Dateien gespeicherten vernetzten Geometriedaten um zusätzliche Angaben zur Programmsteuerung zu ergänzen. Neben globalen Angaben wie z.B. zur gewählten Rechengenauigkeit sind die Zeitschrittweite und ihre Steuerung sowie Material- und Belastungsdaten zu ergänzen.

FEM2Flow. Zur Berechnung von ein- und zweiphasigen Strömungen auf veränderlichen Gebieten wurde das Finite-Elemente-Programm FEM2Flow entwickelt. Es stellt ein in Matlab geschriebenes, objektorientiertes Programm auf Basis der Raum-Zeit-Finite-Elemente-Formulierung dar, das als Laufzeitumgebung MATLAB 2013b oder höher benötigt. Mit Hilfe von FEM2Flow können sowohl zwei- als auch dreidimensionale Strömungs-, Struktur- und Wärmeleitungsberechnungen durchgeführt werden, bei denen sich die Raumposition und die Konnektivität der Knoten mit der Zeit verändern können. Neben einer stationären und instationären Untersuchung kann auch eine Eigenwertanalyse der Systemsteifigkeitsmatrix durchgeführt werden. Standardmäßig kommt das NEWTON-RAPHSON-Verfahren zur Lösung des nichtlinearen Gleichungssystems zur Anwendung. Zur Verringerung der Berechnungsaufwandes besteht bei instationären Berechnungen die Möglichkeit, die implementierte automatische Zeitschrittweitensteuerung zu aktivieren. Darüber hinaus sind für einen effizienten Programmablauf die zeitkritischen Programmbestandteile parallelisiert. Die zur Verfügung stehenden Fluidelemente für ein- und zweiphasige Strömungen basieren auf den inkompressiblen NAVIER-STOKES-Gleichungen in den primären Variablen Geschwindigkeit und Druck. Bei zweiphasigen Strömungen tritt gleichwertig die *Level-Set*-Funktion zur Beschreibung von Lage und Bewegung der Grenzfläche in Verbindung mit einem regularisierten Materialparameterverlauf hinzu. Eine ausführliche Beschreibung der Elementtypen findet sich in den Abschnitten 3.2.1 und 3.3.2. Zur Berücksichtigung der Netzbewegung kann sowohl die in Abschnitt 3.4.2 vorgestellte SSMUM als die in Abschnitt 3.4.3 entwickelte ST-SSMUM verwendet werden. Neben

den Fluidelementen stehen auch zwei- und dreidimensionale Strukturelemente sowohl in verschiebungsbasierter als auch in der gemischten Formulierung nach PIAN zur Verfügung. Die Berechnungsergebnisse werden im Hinblick auf die bei Strömungsberechnungen anfallenden großen Datenmengen im hierarchischen *hdf5*-Format binär gespeichert. Gleichzeitig wird eine in *XML* geschriebene Begleitdatei zur Inhaltsangabe erzeugt, so dass die Darstellung und Analyse der Berechnungsergebnisse unter Verwendung des Visualisierungsprogrammes ParaView möglich ist.

A.1.3 Datenanalyse

Die Analyse der Berechnungsergebnisse erfolgt zum einen anhand der feldweisen Visualisierung der Zustandsgrößen und davon abgeleiteter Ergebnisfelder. Zur eingehenderen Untersuchung werden zum anderen die Berechnungsergebnisse entlang ausgewählter Schnitte oder an bestimmten Punkten aus den gespeicherten Datensätzen ausgelesen und in Diagrammen dargestellt.

Visualisierung

Die feldweise Darstellung der Berechnungsergebnisse kann sowohl mit Hilfe des Visualisierungsprogramms ParaView oder auch unter Verwendung der graphischen Darstellungsroutinen von MATLAB vorgenommen werden. Dafür bietet ParaView neben der interaktiven Möglichkeit bei Verwendung der graphischen Benutzeroberfläche auch ein skriptbasiertes Vorgehen mit Hilfe seiner Python-Schnittstelle *ppython*.

PaPy. Die modular aufgebaute und objektorientierte Programmbibliothek PaPy ist eine in Python geschriebene *Wrapper*-Bibliothek zur Verwendung der Python-Schnittstelle von ParaView. Sie fasst die *Low-Level*-Routinen der Python-Schnittstelle im Hinblick auf eine effiziente und einfache Nutzung für die Darstellung von ein- und zweiphasigen Strömungsfeldern geeignet zusammen. Ihre Verwendung ist sowohl im halbautomatischen Betrieb unter Verwendung der Python-Konsole der graphischen Benutzeroberfläche von ParaView möglich als auch im vollautomatischen *Batch*-Betrieb bei direkter Verwendung von *ppython*. Zusätzlich zur Darstellung der ermittelten Zustandsfelder stellt die Programmbibliothek Methoden zur nachlaufenden Berechnung abgeleiteter Größen wie z.B. Gradienten-, Divergenz- und Wirbelfelder sowie Impuls und Energie zur Verfügung. Die Ergebnisdarstellungen können sowohl als Pixelgraphiken als auch als Videos ausgegeben werden.

MatVis. Ein direkter Zugriff auf die im *hdf5*-Datenformat gespeicherten Ergebnisdaten ist mit Hilfe der *Low-Level*-Routinen von MATLAB möglich. Die in Matlab geschriebene, modular aufgebaute Programmbibliothek MatVis fasst diese geeignet für die Visualisierung von ein- und zweiphasigen Strömungen auf veränderlichen Gebieten zusammen. Zusätzlich zur Darstellung der ausgelesenen Zustandsfelder stehen Funktionen zur Berechnung abgeleiteter Größen zur Verfügung. Die Ausgabe der Zustandsfelder erfolgt neben dem MATLAB-eigenem *fig*-Dateiformat auch als Pixel- und Vektorgraphik im *jpg*- bzw. *pdf*-Format.

Auswertung

Aufbauend auf der Betrachtung der berechneten und abgeleiteten Zustandsfelder erfolgt eine eingehendere Analyse an ausgewählten Schnitten und Punkten sowie die Berechnung integraler Größen.

Jupyter-Notebooks. Mit Hilfe von *Jupyter-Notebooks* ist eine interaktive Auswertung der Berechnungsergebnisse möglich. Diese stellen unabhängig von der verwendeten Programmiersprache eine Arbeitsumgebung dar, in der Programmcode, Text, Abbildungen und auch Videos miteinander kombiniert werden können, so dass eine aussagekräftige, nachvollziehbare und reproduzierbare Datenauswertung vorgenommen werden kann. Ergebnis der Auswertung ist ein Bericht im *html*- oder *pdf*-Format, dessen Graphiken auch separat als Vektor- und Pixelgraphik speicherbar sind. Der Zugriff auf die auszuwertenden Daten erfolgt entweder direkt über die *hdf5*-Ergebnisdatei mit Hilfe des Python-Paketes *h5py* oder unter Verwendung von ParaView zum Setzen von Schnittflächen, die nicht entlang der Elementkanten verlaufen. Im letzteren Fall werden die extrahierten Teildatensätze im *csv*-Format gespeichert und mit Hilfe des Python-Paketes *pandas* eingelesen. Für die Analyse der Daten kommen die Python-Pakete *numpy* und *scipy* zur Anwendung. Die Darstellung der ausgewählten Ergebnisdaten erfolgt mit Hilfe von *matplotlib* als dem klassischen Python-Paket zur graphischen Darstellung von zwei- und dreidimensionalen Kurvenverläufen. Für eine automatisierbaren *Batch*-Betrieb können die *Jupyter-Notebooks* in Python-Skripte konvertiert werden.

DataEx. Neben der interaktiven Datenauswertung mit Hilfe von *Jupyter-Notebooks* erlaubt das in Python geschriebene Programmpaket DataEx eine Analyse der aus dem Gesamtdatensatz herausgezogenen Berechnungsergebnisse im *Batch*-Betrieb. Dabei kommen die Python-Pakete *pandas*, *numpy*, *scipy* und *matplotlib* zur Anwendung. Die aus der Auswertung folgende Ergebnisgraphik wird im *pdf*-Format gespeichert.

A.2 Finite-Elemente-Methode

A.2.1 Entwicklungsgeschichte

Die Finite-Elemente-Methode hat ihre historischen Wurzeln im matriziellen Weggrößenverfahren der Statik [Arg86, Din14]. Ihr verbreiteter Einsatz erfolgte erstmalig während der 1950er Jahren in der Luft- und Raumfahrtindustrie innerhalb der Arbeitsgruppe um M. J. TURNER bei Boeing zur strukturmechanischen Auslegung der Tragwerksteile von Flugzeugen. Als Geburtsstunde der Finite-Elemente-Methode gilt die Veröffentlichung eines von TURNER, CLOUGH, MARTIN und TOPP 1956 gemeinsam verfassten Fachartikels [Tur56]. Dabei verstanden die führenden Entwickler der Finite-Elemente-Methode dieser Zeit infolge ihres Ausbildungshintergrundes in klassischer Mechanik die finiten Elemente im Wesentlichen als Idealisierung von kraftübertragenden Tragwerksteilen. Die Verbindung des sich aus dem matriziellen Weggrößenverfahren entwickelten algorithmischen Vorgehens der Finite-Elemente-Methode und der gerade entstehenden computergestützten Rechentechnik führte zu einem starken Entwicklungsschub. Ausgehend von der Arbeitsgruppe um B. M. IRONS erfolgte die ingenieurmäßige Entwicklung unterschiedlicher Elementformulierungen auf Weggrößenbasis für jeweils spezielle Anwendungsgebiete im Bereich der linearen Elastostatik. Dabei setzte sich das isoparametrische Konzept mit Verwendung von Form- und Verlaufsfunktionen gleicher Ansatzordnung durch, wobei die Kompatibilität mit Hilfe eines *patch tests* sichergestellt wird [Iro64].

Infolge der Arbeiten von MELOSH kam es aufbauend auf der bereits von COURANT durchgeführten variationellen Behandlung von Differentialgleichungen in den 1960er Jahren zur Entdeckung des Zusammenhangs von Finiten-Elemente-Methode und RAYLEIGH-RITZ-Verfahren [Cou68]. Damit bilden von nun an Variationsrechnung und Funktionalanalysis den mathematischen Unterbau der Finite-Elemente-Methode und ermöglichen ergänzend zur ingenieurmäßigen Herangehensweise eine systematische Herleitung von Elementformulierungen auf variationeller Basis sowie die Bereitstellung von *a priori* und *a posteriori* Fehlerschätzern. Daneben fand aus der Luft- und Raumfahrtbranche heraus über CLOUGH eine Verbreitung der Finite-Elemente-Methode in das Bauingenieurwesen hinein statt, in dem dann ARGYRIS und ZIENKIEWICZ es als Standard für numerische Berechnungen etablierten und so der ubiquitären Verbreitung der Finite-Elemente-Methode in der Strukturmechanik den Weg ebneten [Arg86, Zie13, Zie14a, Zie14b]. Eine zusammenfassende Darstellung der variationellen Sichtweise der Finite-Elemente-Methode und des ihr damit zur Verfügung stehenden theoretischen Unterbaus ist erstmals 1973 bei STRANG und FIX zu finden [Str08].

In den 1970er Jahren erfolgte dann auf Basis des vorhandenen mathematischen Unterbaus eine Verallgemeinerung der theoretischen Grundlagen hin zur Methode der gewichteten Residuen [Sch72]. Aus ihr können sowohl die klassische GALERKIN-Formulierung der Finite-Elemente-Methode als auch die TREFFTZ-Formulierung oder die variationelle Formulierung des RITZ-Verfahrens als Sonderfälle abgeleitet werden, so dass sich methodischer Umfang und Anwendungsbereich erheblich vergrößerten. Neben den bisher vorwiegend in der Strukturmechanik betrachteten elliptischen Randwertaufgaben mit ihren symmetrischen Matrizen wurden nun auch transiente parabolische und hyperbolische Differentialgleichungen mit schief- und un-symmetrischen Matrizen untersucht, wie sie bei Transportvorgängen der Wärmeleitung oder

Strömungslehre vorliegen. Dabei fand in der Regel ein Operatorsplitting in Raum- und Zeitbereich statt, in dem das räumliche Gebiet mittels finiter Elemente und die Zeitachse mit der Finiten-Differenzen-Methode diskretisiert wird. Erst im Zuge der Betrachtung von Test- und Interpolationsfunktionen als Bestandteil von SOBOLEV- bzw. HILBERT-Räumen erfolgte neben der Weiterentwicklung der Fehlerschätzer im Rahmen der Etablierung von adaptiven Vernetzungsverfahren auch die Entwicklung von diskontinuierlichen GALERKIN-Verfahren (dG-Verfahren), in denen die Kompatibilität an den Elementgrenzen nicht mehr gewährleistet sein muss [Coc00, Li06, Ort11, Car13]. Eine Zusammenfassung der Verbindung dieser grundlegenden theoretischen Entwicklungsstränge der Finite-Elemente-Methode findet sich in den Lehrbüchern von HUGHES [Hug00a] und BATHE [Bat02]. Davon ausgehend verlagerte sich nun der Fokus auf die Entwicklung angepasster Elementformulierungen für spezielle Anwendungsgebiete, insbesondere für Festkörper mit komplexem und zeitabhängigem Materialverhalten. Gemeinsam war allen diesen Formulierungen, dass sie sich in die von der Weggrößenformulierung vorgegebene Struktur der vorhandenen FE-Programme einfügen mussten.

Seit Anfang der 1990er Jahre hat sich der Forschungs- und Anwendungsbereich der Finite-Elemente-Methode erheblich ausgeweitet. Neben der Entwicklung von adaptiven und Mehrgitterverfahren sowie den sehr genauen spektralen finiten Elementen, haben sich auch netzfreie Verfahren und Partikelmethoden für besondere Einsatzgebiete mit z.B. ausgeprägten Diskontinuitäten oder granularem Materialverhalten etabliert [Fri05, Net09, Ock18]. Dabei hat sich das Anwendungsgebiet ausgehend von der Struktur- und der Strömungsmechanik über die angewandte Physik hinaus bis auf angrenzende Bereiche wie z.B. die Biomechanik erweitert. Verstärkte Betrachtung erlangt seit dem Jahrtausendwechsel darüber hinaus auch die Berechnung gekoppelter Prozesse von unterschiedlichem physikalischen Charakter wie sie z.B. bei der Fluid-Struktur-Interaktion (FSI) vorliegt [Wal99, Wal02, Hüb03, Köl05].

Das sehr breite Anwendungsspektrum der Finite-Elemente-Methode resultiert dabei aus der Kombination von gewichteter Residuenformulierung im Zusammenspiel mit Variationsrechnung und Funktionalanalysis als mathematischem Unterbau. Damit können sämtliche von Differentialgleichungen beschreibbaren physikalischen Vorgänge behandelt werden und es steht stets eine konsistente Theorie für eine systematische Elemententwicklung und zur Ableitung von Fehlerschätzern zur Verfügung [Red98, Fel04, Red05, Red06]. Insgesamt gründet die erfolgreiche Entwicklung der Finite-Elemente-Methode auf dem Zusammentreffen des Matrizenverfahrens der Statik mit der Variationsrechnung und der zeitgleich erfolgten Entwicklung des Digitalrechners vor dem Hintergrund des technologischen Wettlaufs während des Kalten Krieges.

A.2.2 Diskontinuierliche GALERKIN-Verfahren

Neben dem klassischen Vorgehen der Finite-Elemente-Methode auf Basis einer kontinuierlichen GALERKIN-Formulierung (cG_x -Formulierung), bei dem die Ansatzfunktionen für Test- und Zustandvariablen sowohl im Element als auch über die Elementkanten hinweg stetige Verläufe haben, können im Rahmen einer diskontinuierlichen GALERKIN-Formulierung (dG_x -Formulierung) auch unstetige Verläufe an den Elementgrenzen zugelassen werden [Coc00]. Sämtliche dG_x -Formulierung basieren auf dem von REED & HILL entwickelten Verfahren zur Lösung der Neutronen-Transportgleichung [Ree73]. Seitdem können cG_x -Formulierung

als Sonderfall einer dG_x -Formulierung aufgefasst werden. In beiden Fällen erfolgt jedoch eine zusammenhängende Unterteilung des räumlichen Gebietes, so dass weder Überlappungen der finiten Elemente noch Lücken zwischen ihnen auftreten.

Die Kopplung der nur noch elementweise stetigen Verläufe der Zustandsgrößen findet über sog. Sprungintegrale statt, die auch als Flussterme bezeichnet werden und infolge der Anwendung des GAUSSSchen Integralsatzes auf den Divergenzterm der schwach formulierten Bilanzgleichung auftreten. Dabei können die numerischen Flussfunktionen als zu der schwachen Form hinzugetretene Nebenbedingungen aufgefasst werden, die die Konsistenz des numerischen Verfahrens sicherstellen [Car13]. Jedoch sind die numerischen Flussfunktionen in dieser Form nicht eindeutig definiert. In Analogie zum Vorgehen bei der FVM ist es aber möglich, mittels Lösung des zugehörigen RIEMANN-Problems, einen eindeutigen numerischen Fluss festzulegen [Ort11]. Die Konstruktion der numerischen Flussfunktion ist hierbei Kern der Entwicklung einer dG_x -Formulierung und bestimmt maßgeblich seine Stabilität und Genauigkeit.

Infolge des im Sprungintegral enthaltenen numerischen Flusses stellen die diskontinuierlichen GALERKIN-Verfahren einen Übergangsbereich zwischen Finiter-Elemente-Methode und Finiter-Volumen-Methode dar. Dadurch vereinen sie die Genauigkeit der FEM mit der Robustheit und lokalen Erhaltungseigenschaft der FVM, die insbesondere bei Strömungsberechnungen im Hinblick auf die Masseerhaltung vorteilhaft ist und anhand des diskontinuierlichen Verlaufs der Testfunktionen erzielt werden kann [Car13].

Ebenso von Vorteil ist ihre Eigenschaft, im Bereich großer Gradienten oder von Singularitäten numerische Oszillationen im Lösungsfeld zu dämpfen, so dass sie besonders geeignet zur Abbildung konvektionsdominierter Transportvorgänge sind [Li06]. Darüber hinaus liefert die diskontinuierliche Abbildung des Lösungsfeldes die Grundlage für lokale h - und p -Adaptionsstrategien, da sämtliche Fehlerschätzer der FE-Theorie zur Verfügung stehen, so dass die Netzverfeinerung oder die Erhöhung des Polynomgrades hierarchischer Ansatzfunktionen gezielt dort vorgenommen werden kann, wo das physikalische Geschehen dies erfordert.

Zwar führt die diskontinuierliche Beschreibung zu einer blockdiagonalen Struktur der Gesamtsystemmatrix, die sich gut zur Parallelisierung eignet, jedoch ist das dabei entstehende Gleichungssystem aufgrund der Entkopplung der Lösungswerte gemeinsamer Knoten deutlich größer als bei einer kontinuierlichen Diskretisierung und besitzt somit auch einen entsprechend größeren Speicherbedarf. Hinzu kommt, dass die Gesamtsystemmatrix stets unsymmetrisch ist, so dass auch komplexe Eigenwerte auftreten können.

Insgesamt zeigen jedoch die Arbeiten von CARSTENS und ORTLEB die Vorteile einer dG_x -Formulierung bei konvektionsdominierten Transportvorgängen und motivieren so auch die Betrachtung der Diskretisierung des Zeitbereichs mittels diskontinuierlicher Finite-Elemente-Verfahren.

A.3 Turbinentechnologie

A.3.1 Entwicklungsgeschichte

Im Hinblick auf die im alltäglichen Betrieb im 19. Jahrhundert effektiv erreichten Wirkungsgrade bei Wasserrädern und deren Beschränkung im Anwendungsbereich auf die Kleinwasserkraft, schrieb die französische Gesellschaft für Gewerbefleiß 1826 einen Wettbewerb zur Verbesserung der bisherigen Wasserkraftmaschinenteknologie aus. Zielsetzung war dabei sowohl höhere Wirkungsgrade im täglichen Betrieb zu erreichen als auch größere Wassermengen und Fallhöhen verarbeiten zu können [Gie09].

FOURNEYRON entwickelte ab 1827 eine Wasserkraftmaschine mit vertikaler Drehachse und errang damit 1833 den ausgelobten Preis. Die Anströmung erfolgte von oben kommend axial auf feststehende, gekrümmte Bleche, die das Wasser in einen Drall versetzten, bevor es auf einen außenliegenden, beweglichen Schaufelkranz traf, der dadurch in Rotation geriet und das austretende Wasser in radialer Richtung abströmen ließ. Die Maschine erreichte Leistungen bis zu 50 PS (ca. 37 kW) bei Wirkungsgraden von bis zu 85 %.

Für Wasserkraftmaschinen dieses Types, bei dem die Schaufeln vollständig umströmt werden und das Rad nicht durch die Gewichtskraft, sondern durch die Bewegung des Wassers angetrieben wird, hat sich die von FOURNEYRONS Lehrer CLAUDE BURDIN geprägte Bezeichnung *Turbine* (von lat. »turbare«: drehen, gr. $\tau\rho\beta\eta$: Turbulenz) durchgesetzt. Wesentliche konstruktive Verbesserungen erfuhr die FOURNEYRON-Turbine durch Verlegung des Laufrades nach innen (HOWD, 1837) und der Anordnung verstellbarer Leit- und gekrümmter Laufradschaueln (THOMSON, 1838) [Ado59, Qua24].

A.3.2 Theoretische Grundlagen

Die theoretischen Grundlagen der Turbinentechnologie wurde bereits durch EULER im 18. Jahrhundert gelegt und von PONCELET in der ersten Hälfte des 19. Jahrhunderts ausgearbeitet. Gegenüber Wasserrädern, bei denen die Gewichtskraft zum Antrieb der Radachse genutzt wird, die Nutzung der Geschwindigkeit abgesehen vom Stoßrad keine Rolle spielt und im gesamten Radkörper der gleiche Atmosphärendruck herrscht, liegt bei Turbinen zwischen Ein- und Austritt ein Druckunterschied vor. Innerhalb der Turbine wird das durch die Leitschaukeln in Drehung versetzte Wasser beschleunigt und ein Teil der vorliegenden Druckhöhe zusätzlich in Geschwindigkeitshöhe übersetzt, womit die Laufschaufeln der Turbine von der Strömungsgeschwindigkeit des Wassers angetrieben werden. Turbinen werden auch als Strömungsmaschinen bezeichnet, da ihre Schaufeln vollständig umströmt und die Turbine selbst vollständig durchströmt werden, während Wasserräder keine Strömungsmaschinen sind, da Befüllung und Entleerung der Schaufelzwischenräume über denselben Querschnitt erfolgt [Pfl05].

A.3.3 Turbinentypen

Als heutzutage gebräuchlichste Turbinenarten haben sich die nach ihren Erfindern benannten FRANCIS-, KAPLAN- und PELTON- Turbinen durchgesetzt, welche im Vergleich zu Wasserrädern mit deutlich höheren Umdrehungszahlen arbeiten. Ihr Wirkprinzip entspricht weitestgehend demjenigen der FOURNEYRON-Turbine, wobei Lauf- und Leitrad ihre Positionen vertauscht haben [Pf05, Gie09, Zha09].

Francis-Turbinen. Der 1849 vom US-amerikanischen Ingenieur JAMES B. FRANCIS entwickelte Turbinentyp stellt weitestgehend eine Weiterentwicklung der FOURNEYRON-Turbine dar. Entlang des außen liegenden, feststehenden Leitrades mit meist verstellbaren Schaufeln erfolgt der Eintritt des Wassers in das bewegliche Laufrad, dessen Schaufeln wiederum gegenläufig gekrümmt sind. FRANCIS-Turbinen verarbeiten mittlere bis große Durchflussmengen bei mittleren bis großen Fallhöhen und erbringen dabei Leistungen bis ca. 750 MW bei Wirkungsgraden um 90 %. Jedoch reagieren sie empfindlich auf Schwankungen in Durchflussmenge und Fallhöhe und haben ihren optimalen Arbeitsbereich in der näheren Umgebung ihres maximalen Wirkungsgrades.

Kaplan-Turbinen. Für nur geringe Wasserdrücke bei gleichzeitig großen Durchflussmengen entwickelte der Österreicher VIKTOR KAPLAN 1913 den nach ihm benannten Turbinentyp. Die KAPLAN-Turbine stellt eine Weiterentwicklung der FRANCIS-Turbine dar, bei der der Rotor einer Schiffsschraube entspricht. Sie kann Fallhöhen bis 80 m verarbeiten, kommt jedoch vorwiegend in großen Flusskraftwerken zum Einsatz und erreicht dabei Wirkungsgrade von 80 % – 95 %. Außer bei den Propellerturbinen, als Variante der KAPLAN-Turbinen, sind sowohl Lauf- als auch Leitrad-schaufeln beweglich, so dass eine Anpassung an Durchfluss- und Fallhöhen-schwankungen erfolgen kann. Aufgrund der Schaufelgeometrie in Verbindung mit den hohen Drehzahlen sind KAPLAN-Turbinen kavitationsgefährdet, dem jedoch durch konstruktive Maßnahmen begegnet werden kann.

Pelton-Turbinen. Gegenüber den FRANCIS- und KAPLAN-Turbinen, die durch den Abbau des Druckunterschiedes zwischen Ein- und Austritt angetrieben und deren Schaufeln vollständig umströmt werden, ähnelt die vom US-Amerikaner LESTER PELTON 1880 entwickelten PELTON-Turbinen noch am ehesten vom Wirkungsprinzip her demjenigen der Wasserräder. Aus einer oder mehreren Düsen tritt ein Freistrahle mit sehr hoher Geschwindigkeit von teilweise bis zu 500 km/h, dessen kinetische Energie die gesamte Strömungsenergie umfasst, auf auf einem Rad angeordnete becherförmige Schaufeln, das dadurch in Rotation versetzt wird. Es kann daher als stark optimiertes Wasserrad angesehen werden und stellt die moderne Form der Gleichdruckturbine dar. PELTON-Turbinen werden in der Regel im Hochgebirge in Speicherkraftwerken bei sehr großen Fallhöhen zwischen 500 m bis 2000 m bei nur geringen Durchflussmengen zur Abdeckung des Spitzenbedarfs eingesetzt und erreichen dabei Leistungen bis zu 400 MW. Als Folge der örtlich konzentrierten Beanspruchung des Wasserstrahls auf die Schaufelbecher erfahren diese gegenüber den Schaufeln bei FRANCIS- und KAPLAN-Turbinen eine wesentlich höhere Anzahl an Lastwechseln im Betrieb, so dass Ermüdungsphänomenen

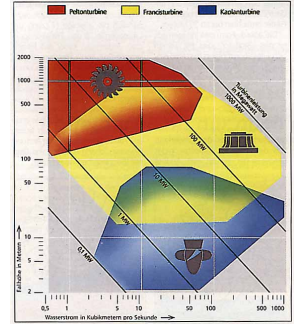
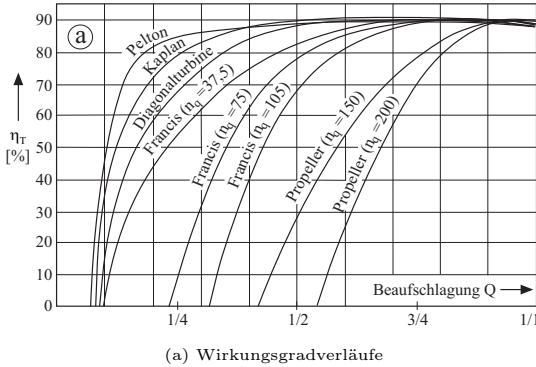


Abb. A.2: Kennfelder von Turbinen [Gie09]

bei PELTON-Turbinen mehr Beachtung geschenkt werden muss. Auch führen abrasive Partikel, wie Sand oder andere Schwebstoffe, die vom Wasser mitgeführt werden, aufgrund der hohen Strahlggeschwindigkeit zu einer sehr hohen Materialbeanspruchung.

Durchströmturbine. Den Wasserrädern im Wirkungsprinzip noch ähnlicher als die PELTON-Turbine ist die Durchströmturbine. Beim Durchströmen trifft das Wasser zweimal stoßfrei auf die Schaufeln und gibt seine Energie damit schubweise ab. Dabei ist die Turbine nicht vollständig vom Wasser ausgefüllt, so dass kein Überdruck vorliegt. Sie können nur geringe Durchflussmengen bei niedrigen Fallhöhen verarbeiten und werden daher vorwiegend in Flusskraftwerken eingesetzt. Ebenso wie bei Wasserrädern weisen Durchströmturbinen für einen großen Schwankungsbereich der Durchflussmenge einen weitestgehend optimalen Wirkungsgrad von um die 80% auf. Aufgrund ihrer robusten Konstruktion mit nur geringem Wartungsbedarf werden sie häufig in Entwicklungsländern verwendet.

A.3.4 Einsatzbereiche

Gemeinsam ist den drei Hauptturbinentypen ihr in Abbildung A.2a dargestellter Wirkungsgradverlauf. Ausgehend von einer erforderlichen Mindestbeaufschlagungsmenge von mehr als 10% des maximalen Durchflusses bis teilweise zu 50% bei Propellerturbinen wird der maximale Wirkungsgrad im Bereich von 90% erst oberhalb von $0.5 Q_{\max}$ erreicht. Bei einigen Typen von FRANCIS-Turbinen sogar teilweise erst noch deutlich später. Dabei zeigt sich, dass KAPLAN-Turbinen gegenüber Durchflussmengenschwankungen im Hinblick auf den Wirkungsgradverlauf unempfindlicher sind als FRANCIS-Turbinen und daher vorwiegend in Flusskraftwerken eingesetzt werden. Dagegen werden FRANCIS-Turbinen in der Regel in Speicherkraftwerken eingesetzt, bei denen eine konstante Durchflussmenge eher sichergestellt werden kann.

Gegenüber FRANCIS- und KAPLAN-Turbinen weisen lediglich PELTON-Turbinen aufgrund ihres Arbeitsprinzips einen den Wasserrädern ähnlichen Wirkungsgradverlauf mit geringer Mindestbeaufschlagung und durchweg konstant hohem Wirkungsgradverlauf auf.

Für die Abbildung A.2b dargestellten Einsatzgebiete von Turbinen ergibt sich somit, dass FRANCIS-Turbinen den mittleren Arbeitsbereich von mittleren bis großen Durchflüssen bei mittleren bis großen Fallhöhen abdecken. Ergänzt werden sie nach oben hin durch PELTON-Turbinen für die sehr großen Fallhöhen bei geringen Durchflussmengen, während KAPLAN-Turbinen die sehr großen Durchflussmengen bei kleinen Fallhöhen verarbeiten.

B Literatur

- [Ado59] ADOPLH, M.: *Einführung in die Strömungsmaschinen*, Springer, 1959
- [Akk12] AKKERMAN, I.; BAZILEVS, Y.; BENSON, D. J.; FARTHING, M. W.; KEES, C. E.: *Free-Surface Flow and Fluid-Object Interaction Modeling With Emphasis on Ship Hydrodynamics*, Journal of Applied Mechanics, 2012, 79:010905–1–010905–11
- [Alf16] ALFARRA, A.: *Numerische Analyse von Bauwerk-Wind-Wechselwirkungen mit RANS-Turbulenzmodellen*, Dissertation, Technische Universität Braunschweig, Braunschweig, 2016
- [Alt12] ALTENBACH, H.: *Kontinuumsmechanik*, Springer-Vieweg, 2012
- [Arg69] ARGYRIS, J.; SCHARPF, D.: *Finite Elements in Time and Space*, Nuclear Engineering and Design, 1969, 10(4):456–464
- [Arg86] ARGYRIS, J.: *Die Methode der finiten Elemente in der elementaren Strukturmechanik*, Vieweg, 1986
- [Ari89] ARIS, R.: *Vectors, Tensors and the Basic Equations of Fluid Mechanics*, Dover, 1989
- [Asc98] ASCHER, U.; PETZOLD, L.: *Computer Methods for Ordinary Differential Equations and Differential-Algebraic Equations*, Society for Industrial and Applied Mathematics, 1998
- [Aur04] AURICCHIO, F.; BREZZI, F.; LOVADINA, C.: *Mixed Finite Element Methods*, in: STEIN, E.; DE BORST, R.; HUGHES, T. (Hrsg.), *Encyclopedia of Computational Mechanics*, Bd. 1: Fundamentals, Kp. 9, John Wiley & Sons, 2004
- [Baa04] BAAIJENS, F.; HULSEN, M.; ANDERSON, P.: *The Use of Mixed Finite Element Methods for Viscoelastic Fluid Flow Analysis*, in: STEIN, E.; DE BORST, R.; HUGHES, T. (Hrsg.), *Encyclopedia of Computational Mechanics*, Bd. 3: Fluids, Kp. 14, John Wiley & Sons, 2004
- [Bab73] BABUSKA, I.: *The Finite Element Method with Lagrangian Multipliers*, Numerische Mathematik, 1973, 20(3):179–192
- [Bac86] BACH, C.: *Wasserräder*, Verlag Konrad Wittwer, 1886
- [Bal99] BALCK, F.: *Wasserkraftmaschinen für den Bergbau im Harz*, Habilitation, Technische Universität Clausthal, 1999
- [Bat00] BATCHELOR, G.: *An Introduction to Fluid Dynamics*, Cambridge University Press, 2000
- [Bat02] BATHE, K.-J.: *Finite-Elemente-Methoden*, Springer, 2002

- [Baz07] BAZILEVS, Y.; CALO, V.; COTTRELL, J.; HUGHES, T.; REALI, A.; SCOVAZZI, G.: *Variational Multiscale Residual-Based Turbulence Modeling for Large Eddy Simulation of Incompressible Flows*, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 2007, 197(1-4):173–201
- [Baz11] BAZILEVS, Y.; HSU, M.-C.: *3D Simulation of Wind Turbine Rotors at Full Scale. Part I: Geometry Modeling and Aerodynamics*, International Journal for Numerical Methods in Fluids, 2011
- [Baz15] BAZILEVS, Y.; TAKIZAWA, K.; TEZDUYAR, T. E.: *New Directions and Challenging Computations in Fluid Dynamics Modeling with Stabilized and Multiscale Methods*, Mathematical Models and Methods in Applied Sciences, 2015, 25(12):2217–2226
- [Beh94] BEHR, M.; TEZDUYAR, T. E.: *Finite Element Solution Strategies for Large-Scale Flow Simulations*, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 1994, 112(1):3–24
- [Beh99] BEHR, M.; TEZDUYAR, T. E.: *The Shear-Slip Mesh Update Method*, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 1999, 174:261–274
- [Beh01a] BEHR, M.: *Stabilized Space-Time Finite Element Formulations for Free-Surface Flows*, Communications in Numerical Methods in Engineering, 2001, 11:813–819
- [Beh01b] BEHR, M.; TEZDUYAR, T. E.: *Shear-Slip Mesh Update in 3D Computation of Complex Flow Problems with Rotating Mechanical Components*, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 2001, 190(24-25):3189–3200
- [Beh03] BEHR, M.; ARORA, D.: *Shear-Slip Mesh Update Method: Implementation and Applications*, Computer Methods in Biomechanics and Biomedicine, 2003, 6:113–123
- [Bir01] BIROS, G.; YING, L.; ZORIN, D.: *An Embedded Boundary Integral Solver for the Unsteady Incompressible Navier-Stokes Equations: Technical Report*, Techn. Bericht, New York University, 2001
- [Bof08] BOFFI, D.; BREZZI, F.; DEMKOWICZ, L.; DURAN, R.; FALK, R.; FORTIN, M.: *Mixed Finite Elements, Compatibility Conditions and Applications*, Springer, 2008
- [Böh98] BÖHM, M.; WECHSLER, K.; SCHÄFER, M.: *A Parallel Moving Grid Multigrid Method for Flow Simulation in Rotor-Stator Configurations*, International Journal for Numerical Methods in Engineering, 1998, 42(1):175–189
- [Böh12] BÖHLE, M.; EHRHARD, P.; ETTLING, D.; MÜLLER, U.; RIEDEL, U.; SREENIVASAN, K. R.: *Prandtl - Führer durch die Strömungslehre*, Springer-Vieweg, 2012
- [Bol87] BOLTZMANN, L.: *Vorlesung über die Principe der Mechanik, 1. Theil*, Verlag Johann Ambrosius Barth, Leipzig, 1887
- [Bon12] BONET, J.; WOOD, R. D.: *Nonlinear Continuum Mechanics for Finite Element Analysis*, Cambridge University Press, 2012

-
- [Bre74] BREZZI, F.: *On the Existence, Uniqueness and Approximation of Saddle-Point Problems Arising from Lagrangian Multipliers*, ESAIM: Mathematical Modelling and Numerical Analysis - Modélisation Mathématique et Analyse Numérique, 1974, 8(R2):129–151
 - [Bre91] BREZZI, F.; FORTIN, M.: *Mixed and Hybrid Finite Elements Methods*, Springer, 1991
 - [Bre96] BRENNAN, K.; CAMPBELL, S.; PETZOLD, L.: *Numerical Solution of Initial-Value Problems in Differential-Algebraic Equations*, SIAM Society for Industrial and Applied Mathematics, 1996
 - [Bre05] BRENNEN, C.: *Fundamentals of Multiphase Flows*, Cambridge University Press, 2005
 - [Bro82] BROOKS, A. N.; HUGHES, T. J. R.: *Streamline Upwind Petrov-Galerkin Formulation for Convection-Dominated Flows with Particular Emphasis on the Incompressible Navier-Stokes Equations*, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 1982, 32:199–259
 - [Bru95] BRUGGAIER, B.: *Aspekte eines ALE-Galerkin-Finit-Element-Verfahrens zur Simulation inkompressibler Flüssigkeiten mit beweglichen Trennflächen*, Dissertation, TU Darmstadt, 1995
 - [Car13] CARSTENS, S.: *Diskontinuierliche GALERKIN-Verfahren in Raum und Zeit zur Simulation von Transportprozessen*, Dissertation, Universität Kassel, 2013
 - [Cho93] CHOPP, D. L.: *Computing Minimal Surfaces via Level Set Curvature Flow*, Journal of Computational Physics, 1993, (106):77–91
 - [CO11] CASTRO-ORGAS, O.; CHANSON, H.: *Near-Critical Free-Surface Flows: Real Fluid Flow Analysis*, Environmental Fluid Mechanics, 2011, 11(5):499–516
 - [Coc00] COCKBURN, B.; KARNIADAKIS, G. E.; SHU, C.-W. (Hrsg.): *Discontinuous Galerkin Methods*, Springer, 2000
 - [Col64] COLLATZ, L.: *Funktionalanalysis und Numerische Mathematik*, Springer, 1964
 - [Com91] COMINI, G.; GIUDICE, S. D.: *A Physical Interpretation of Conventional Finite Element Formulations of Conduction-Type Problems*, International Journal for Numerical Methods in Engineering, 1991, 32(3):559–569
 - [Cos09] COSSERAT, E.; COSSERAT, F.: *Théorie des corps déformables*, Hermann, Paris, 1909
 - [Cot09] COTTRELL, J. A.; HUGHES, T. J. R.; BAZILEVS, Y.: *Isogeometric Analysis*, Wiley, 2009
 - [Cou68] COURANT, R.; HILBERT, D.: *Methoden der mathematischen Physik II*, Springer, 1968
 - [Din13] DINKLER, D.: *Einführung in die Finite-Elemente-Methode*, 2013

- [Din14] DINKLER, D.: *Grundlagen der Baustatik: Modelle und Berechnungsmethoden für ebene Stabtragwerke*, Springer-Vieweg, 2014
- [Don77] DONÉA, J.; FASOLI-STELLA, P.; GIULIANI, S.: *Lagrangian and Eulerian Finite Element Techniques for Transient Fluid-Structure Interaction Problems*, Transactions of the 4th Int. Conference on SMIRT, San Francisco, 1977, B1/2
- [Don03] DONEA, J.; HUERTA, A.: *Finite Element Methods for Flow Problems*, John Wiley & Sons, 2003
- [Dur04] DURBIN, P. A.: *Turbulence Closure Models for Computational Fluid Dynamics*, Bd. 3: Fluids, Kp. 10, 301–324, John Wiley & Sons, 2004
- [Dur06] DURST, F.: *Grundlagen der Strömungsmechanik*, Springer, 2006
- [Elg15] ELGETI, S.; SAUERLAND, H.: *Deforming Fluid Domains within the Finite Element Method: Five Mesh-Based Tracking Methods in Comparison*, Archives of Computational Methods in Engineering, 2015
- [Enr02] ENRIGHT, D.; FEDKIW, R.; FERZIGER, J.; MITCHELL, I.: *A Hybrid Particle Level Set Method for Improved Interface Capturing*, Journal of Computational Physics, 2002, 183(1):83–116
- [Ert09] ERTURK, E.: *Discussions on Driven Cavity Flow*, International Journal for Numerical Methods in Fluids, 2009, 60(3):275–294
- [Far01] FARHAT, C.; GEUZAIN, P.; GRANDMONT, C.: *The Discrete Geometric Conservation Law and the Nonlinear Stability of ALE Schemes for the Solution of Flow Problems on Moving Grids*, Journal of Computational Physics, 2001, 174:669–694
- [Fel04] FELIPPA, C. A.: *Introduction to Finite Element Methods*, 2004
- [Fer08] FERZIGER, J. H.; PERIC, M.: *Numerische Strömungsmechanik*, Springer, 2008
- [Fin72] FINLAYSON, B. A.: *The Method of Weighted Residuals*, Academic Press, 1972
- [Fra88] FRANCA, L.; HUGHES, T. J. R.: *Two Classes of Mixed Finite Element Methods*, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 1988, 69:89–129
- [Fra92] FRANCA, L.; FREY, S. L.; HUGHES, T. J. R.: *Stabilized Finite Element Methods 1: Application to the Advective-Diffusive Model*, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 1992
- [Fra03] FRANCA, L.; HAUKE, G.; MASUD, A.: *Stabilized Finite Element Methods*, CIMNE, 2003
- [Fra04] FRANCA, L.; TEZDUYAR, T. E.; MASUD, A. (Hrsg.): *Finite Element Methods: 1970's and Beyond*, CIMNE, 2004
- [Fri05] FRIES, T.-P.: *A Stabilized and Coupled Meshfree/Meshbased Method for Fluid-Structure Interaction Problems*, Dissertation, Technische Universität Braunschweig, 2005

-
- [Fuh34] FUHRMANN, O.: *Schwingungsuntersuchungen an überströmten beweglichen Wehren*, Techn. Bericht, Preußische Versuchsanstalt für Wasserbau und Schiffbau, 1934
 - [Gam10] GAMNITZER, P.: *Residual-Based Variational Multiscale Methods for Turbulent Flows and Fluid-Structure Interaction*, Dissertation, 2010
 - [Geb15] GEBHARDT, M.; DEUTSCHER, M.; METZ, W.: *Fluid-Struktur-Wechselwirkung im Stahlwasserbau: Ursachen, Auswirkungen und Abhilfemaßnahmen bei strömungs-induzierten Schwingungen*, in: BAW-Kolloquium Wasserbauwerke - Vom hydraulischen Entwurf bis zum Betrieb, 2015 59–66
 - [Ger92] GERSTEN, K.; HERWIG, H.: *Strömungsmechanik*, Vieweg, 1992
 - [Ghi82] GHIA, U.; GHIA, K. N.; SHIN, C. T.: *High-Re Solutions for Incompressible Flow Using the Navier-Stokes Equations and a Multigrid Method*, Journal of Computational Physics, 1982, 48:387–411
 - [Gie09] GIESECKE, J.; MOSONYI, E.: *Wasserkraftanlagen*, Springer, 2009
 - [Giu92] GIUDICE, S. D.; COMINI, G.; NONINO, C.: *A Physical Interpretation of Conservative and Non-Conservative Finite Element Formulations of Convection-type Problems*, International Journal for Numerical Methods in Engineering, 1992, 35(4):709–727
 - [Göb17] GÖBEL, G.: *Strömungsinduzierte Schwingungen im Stahlwasserbau*, BAW Aktuell, 2017, (2):9
 - [Gra03] GRAVEMEIER, V.: *The Variational Multiscale Method for Laminar and Turbulent Incompressible Flow*, Dissertation, Universität Stuttgart, 2003
 - [Gre91] GRESHO, P. M.: *Incompressible Fluid Dynamics: Some Fundamental Formulation Issues*, Annual Review Fluid Mechanics, 1991, 23:413–453
 - [Gre00] GRESHO, P. M.; SANI, R. L.: *Incompressible Flow and the Finite Element Method, Volume Two: Isothermal Laminar Flow*, Wiley, 2000
 - [Gro01] GROHMANN, B. A.: *Stabilized Space-Time Finite Elements for Transonic Aeroelasticity*, Dissertation, Universität Stuttgart, 2001
 - [Gro16] GROTELÜSCHEN, F.: *Das Rad neu erfinden*, stern, 2016
 - [Gun12] GUNZBURGER, M. D.: *Finite Element Methods for Viscous Incompressible Flows: A Guide to Theory, Practice and Algorithms*, Elsevier, 2012
 - [Ham67] HAMEL, G.: *Theoretische Mechanik*, Springer, 1967
 - [Han92a] HANSBO, P.: *The Characteristic Streamline Diffusion Method for Convection-Diffusion Problems*, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 1992, 96(2):239–253
 - [Han92b] HANSBO, P.: *The Characteristic Streamline Diffusion Method for the Time-Dependent Incompressible Navier-Stokes Equations*, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 1992, 99(2):171–186

- [Har65] HARLOW, F. H.; WELCH, J. E.: *Numerical Calculation of Time-Dependent Viscous Incompressible Flow of Fluid with Free Surface*, The Physics of Fluids, 1965, 8(12):2182–2189
- [Her06] HERWIG, H.: *Strömungsmechanik*, Springer, 2006
- [Her08] HERWIG, H.: *Strömungsmechanik*, Vieweg+Teubner, 2008
- [Heu06] HEUSER, H.: *Funktionalanalysis*, Teubner, 2006
- [Hil00] HILBERT, D.: *Mathematische Probleme*, Nachrichten von der Königlich Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen. Mathematisch-Physikalische Klasse, 1900, (3):253–297
- [Hir81] HIRT, C. W.; NICHOLS, B. D.: *Volume of Fluid (VOF) Method for the Dynamics of Free Boundaries*, Journal of Computational Physics, 1981, 39(1):201–225
- [Hüb03] HÜBNER, B.: *Simultane Analyse von Bauwerk-Wind-Wechselwirkungen*, Dissertation, Technische Universität Braunschweig, 2003
- [Hug79] HUGHES, T. J. R.; BROOKS, A. N.: *A Multi-Dimensional Upwind Scheme with no Crosswind Diffusion*, Finite Element Methods for Convection Dominated Flows, 1979, 34:19–35
- [Hug81] HUGHES, T. J. R.; LIU, W. K.; ZIMMERMANN, T. K.: *Lagrangian–Eulerian Finite Element Formulation for Viscous Flows*, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 1981, 29:329–349
- [Hug88] HUGHES, T. J. R.; HULBERT, G. M.: *Space-Time Finite Element Methods for Elastodynamics: Formulation and Error Estimates*, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 1988, 66:339–363
- [Hug95] HUGHES, T. J. R.: *Multiscale Phenomena: Green's Functions, the Dirichlet-to-Neumann Formulation, Subgrid Scale Models, Bubbles and the Origins of Stabilized Methods*, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 1995, 127(1-4):387–401
- [Hug96] HUGHES, T. J. R.; STEWART, J. R.: *A Space-Time Formulation for Multiscale Phenomena*, Journal of Computational and Applied Mechanics, 1996, 74:217–229
- [Hug00a] HUGHES, T. J. R.: *The Finite Element Method: Linear Static and Dynamic Finite Element Analysis*, Dover, 2000
- [Hug00b] HUGHES, T. J. R.; ENGEL, G.; MAZZEI, L.; LARSON, M. G.: *The Continuous Galerkin Method is Locally Conservative*, Journal of Computational Physics, 2000, 163(2):467–488
- [Hug04a] HUGHES, T. J. R.: *Fluids: Introduction and Survey*, in: STEIN, E.; DE BORST, R.; HUGHES, T. (Hrsg.), *Encyclopedia of Computational Mechanics*, Bd. 3: Fluids, Kp. 1, John Wiley & Sons, 2004

-
- [Hug04b] HUGHES, T. J. R.; SCOVAZZI, G.; FRANCA, L. P.: *Multiscale and Stabilized Methods*, in: STEIN, E.; DE BORST, R.; HUGHES, T. (Hrsg.), *Encyclopedia of Computational Mechanics*, Bd. 3: Fluids, Kp. 2, John Wiley & Sons, 2004
- [Hug05] HUGHES, T. J. R.; COTTRELL, J.; BAZILEVS, Y.: *Isogeometric Analysis: CAD, Finite Elements, NURBS, Exact Geometry and Mesh Refinement*, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 2005, 194(39-41):4135–4195
- [Hul92] HULBERT, G. M.: *Time Finite Element Methods for Structural Dynamics*, International Journal for Numerical Methods in Engineering, 1992, 33:307–331
- [Hut03] HUTTER, K.: *Fluid- und Thermodynamik*, Springer, 2003
- [Iro64] IRONS, B. M.; BARLOW, J.: *Comments on "Matrices for the Direct Stiffness Method" by R. J. Melosh*, AIAA Journal, 1964, 2(403)
- [Jen09] JENSEN, J.; FRANK, T.; WIELAND, J.: *Die Renaissance der Wasserkraft*, Energy 2.0 - Kompendium, 2009
- [Jir07] JIRKA, G. H.: *Einführung in die Hydromechanik*, 2007
- [Jir09] JIRKA, G. H.; LANG, C.: *Einführung in die Gerinnehydraulik*, 2009
- [Joh93] JOHNSON, C.: *Discontinuous Galerkin Finite Element Methods for Second Order Hyperbolic Problems*, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 1993, 107(1):117–129
- [Joh94] JOHNSON, A. A.; TEZDUYAR, T. E.: *Mesh Update Strategies in Parallel Finite Element Computations of Flow Problems with Moving Boundaries and Interfaces*, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 1994, 119:73–94
- [Kno10] KNOBBE, E. M.: *On the Integration of the Arbitrary Lagrangian-Eulerian Concept and Non-Equilibrium Thermodynamics*, Dissertation, TU Delft, 2010
- [Knu00a] KNUPP, P. M.: *Achieving Finite Element Mesh Quality via Optimization of the Jacobian Matrix Norm and Associated Quantities. Part I - A Framework for Surface Mesh Optimization*, International Journal for Numerical Methods in Engineering, 2000, 48:401–420
- [Knu00b] KNUPP, P. M.: *Achieving Finite Element Mesh Quality via Optimization of the Jacobian Matrix Norm and Associated Quantities. Part II - A Framework for Volume Mesh Optimization and the Condition Number of the Jacobian Matrix.*, International Journal for Numerical Methods in Engineering, 2000, 48:1165–1185
- [Knu01] KNUPP, P. M.: *Algebraic Mesh Quality Metrics*, SIAM Journal on Scientific Computing, 2001, 23(1):193–218
- [Köl05] KÖLKE, A.: *Modellierung und Diskretisierung bewegter Diskontinuitäten in randgekoppelten Mehrfeldsystemen*, Dissertation, Technische Universität Braunschweig, 2005
- [Kön05] KÖNIG, F. V.; JEHL, C.: *Bau von Wasserkraftanlagen*, C. F. Müller Verlag, 2005

- [Kos84] KOSEFF, J. R.; STREET, R. L.: *The Lid-Driven Cavity Flow: A Synthesis of Qualitative and Quantitative Observations*, Journal of Fluids Engineering, 1984, 106(4):390–398
- [Kun06] KUNKEL, P.; MEHRMANN, V.: *Differential-Algebraic Equations: Analysis and Numerical Solution*, Europ. Math. Soc., 2006
- [Lam91] LAMBERT, J. D.: *Numerical Methods for Ordinary Differential Systems: The Initial Value Problem*, Wiley, 1991
- [Lau11] LAURIEN, E.; OERTEL JR., H.: *Numerische Strömungsmechanik*, Vieweg+Teubner, 2011
- [Leo54] LEO, B.: *Selbstgesteuerte Schwingungen an überströmten Wehren*, Akademie-Verlag Berlin, 1954
- [Les96] LESOINNE, M.; FARHAT, C.: *Geometric Conservation Laws for Flow Problems with Moving Boundaries and Deformable Meshes and their Impact on Aeroelastic Computations*, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 1996, 134(1):71–90
- [Lew12] LEW, A. J.; RANGARAJAN, R.; HUNSWECK, M. J.; GAWLIK, E. S.; KABARIA, H.; SHEN, Y.: *Universal Meshes: Enabling High-Order Simulation of Problems with Moving Domains*, IACM Expressions, 2012, 32:12–16
- [Li06] LI, B. Q.: *Discontinuous Finite Elements in Fluid Dynamics and Heat Transfer*, Springer, 2006
- [Löh08] LÖHNER, R.: *Applied Computational Fluid Dynamics Techniques: An Introduction Based on Finite Element Methods*, John Wiley & Sons, 2008
- [Mar06] MARCHANDISE, E.; REMACLE, J.-F.: *A Stabilized Finite Element Method using a Discontinuous Level Set Approach for Solving Two Phase Incompressible Flows*, Journal of Computational Physics, 2006, 219(2):780–800
- [Mas97] MASUD, A.; HUGHES, T. J. R.: *A Space-Time Galerkin/Least-Squares Finite Element Formulation of the Navier-Stokes Equations for Moving Domain Problems*, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 1997, 146(1):91–126
- [Mat96] MATTHEIJ, R. M. M.; MOLENAAR, J.: *Ordinary Differential Equations in Theory and Practice*, Wiley, 1996
- [Mea95] MEAKIN, R. L.: *The Chimera Method of Simulation for Unsteady Three-Dimensional Viscous Flow*, Computational Fluid Dynamics Review, 1995
- [Mee34] MEERWARTH, K. W.: *Experimentelle und theoretische Untersuchungen am ober-schlächtigen Wasserrad*, Dissertation, Technische Hochschule Stuttgart, 1934
- [Mis08] MISES, R. v.: *Theorie der Wasserräder*, Teubner, 1908
- [Mit05] MITTAL, R.; IACCARINO, G.: *Immersed Boundary Methods*, Annual Review of Fluid Mechanics, 2005, 37(1):239–261

-
- [Mül99a] MÜLLER, W.: *Die Eisernen Wasserräder, Teil 1: Die Zellenräder*, Veit & Comp., 1899
- [Mül99b] MÜLLER, W.: *Die Eisernen Wasserräder, Teil 2: Die Schaufelräder*, Veit & Comp., 1899
- [Mül99c] MÜLLER, W.: *Die Eisernen Wasserräder, Teil 3: Atlas*, Veit & Comp., 1899
- [Mül39] MÜLLER, W.: *Die Wasserräder*, Verlag Moritz Schäfer, Leipzig, 1939
- [Mül03] MÜLLER, G.; KAUPPERT, K.: *Die Wasserräder als hydraulische Kraftmaschinen*, Bautechnik, 2003, 80(3):181–189
- [Mül05] MÜLLER, G.; BECKER, T.: *Das mittelschlächlige Wasserrad als Energiewandler für kleine Fallhöhen*, Wasserwirtschaft, 2005, (6)
- [Mut06] MUT, F.; BUSCAGLIA, G. C.; DARI, E. A.: *New Mass-Conserving Algorithm for Level Set Redistancing on Unstructured Meshes*, Journal of Applied Mechanics, 2006, 73(6):1011–1016
- [Nau91] NAUDASCHER, E.: *Hydrodynamic Forces. IAHR Hydraulic Structures Design Manual*, A. A. Balkema, 1991
- [Nau92] NAUDASCHER, E.: *Hydraulik der Gerinne und Gerinnebauwerke*, Springer-Verlag, 1992
- [Nau94] NAUDASCHER, E.; ROCKWELL, D.: *Flow-Induced Vibrations*, A. A. Balkema, Rotterdam, 1994
- [Net09] NETUZHLYOV, H.: *A Space-Time Meshfree Collocation Method for Coupled Problems on Irregularly-Shaped Domains*, Dissertation, Technische Universität Braunschweig, 2009
- [Neu77] NEUMAYER, H.; REMPP, W.; RUPPERT, J.; SCHWÖRER, R.: *Untersuchungen am Wasserradtriebwerk der Kunstmühle W. Seifried KG, Waldkirch/Br.*, Techn. Bericht, Institut für Wasserbau der Universität Stuttgart, 1977
- [Neu13] NEUMÜLLER, M.: *Space-Time Methods*, Dissertation, TU Graz, 2013
- [Nol74] NOLL, W.: *The Foundations of Mechanics and Thermodynamics*, Springer, 1974
- [Nue05] NUERNBERGK, D. M.: *Wasserräder mit Kropfgerinne*, Verlag Moritz Schäfer, 2005
- [Ock18] OCKELMANN, F.: *Modellierung und numerische Analyse von Beton und faserverstärktem Ultrahochleistungsbeton mit der Diskrete Elemente Methode*, Dissertation, Technische Universität Braunschweig, 2018
- [Ode69] ODEN, J. T.: *A General Theory of Finite Elements, I: Topological Considerations*, International Journal for Numerical Methods in Engineering, 1969, 1(2)
- [Ode96] ODEN, J. T.; DEMKOWICZ, L.: *Applied Functional Analysis*, CRC Press, 1996
- [Oj06] OERTEL JR., H.; BÖHLE, M.; DOHRMANN, U.: *Strömungsmechanik*, Vieweg & Sohn, 2006

- [Oli17] OLIVER, X.; AGELET DE SARACIBAR, C.: *Continuum Mechanics for Engineers. Theory and Problems*, 2017
- [Ort11] ORTLEB, S.: *Ein diskontinuierliches Galerkin-Verfahren hoher Ordnung auf Dreiecksgittern mit modaler Filterung zur Lösung hyperbolischer Erhaltungsgleichungen*, Dissertation, Universität Kassel, 2011
- [Osh88] OSHER, S.; SETHIAN, J. A.: *Fronts Propagating with Curvature Dependent Speed: Algorithms Based on Hamilton-Jacobi Formulations*, Journal of Computational Physics, 1988, 79(1):12–49
- [Osh01] OSHER, S.; FEDKIW, R.: *Level Set Methods: An Overview and Some Recent Results*, Journal of Computational Physics, 2001, 169(2):463–502
- [Osh03] OSHER, S.; FEDKIW, R.: *Level Set Methods and Dynamic Implicit Surfaces*, Springer, 2003
- [Pas14] PASENOW, F.: *Modellierung oberflächengekoppelter Mehrfeldsysteme und numerische Analyse rutschender Bodenmaterialien*, Dissertation, Technische Universität Braunschweig, 2014
- [Per93] PERNG, C.; MURTHY, J.: *Sliding-Mesh Technique for Simulation of Flow in Mixing Tanks*, American Society of Mechanical Engineers, 1993, 1–9
- [Pfl05] PFLEIDERER, C.; PETERMANN, H.: *Strömungsmaschinen*, Springer, 2005
- [Pro09] PROSPERETTI, A.; TRYGGVASON, G.: *Computational Methods for Multiphase Flow*, Cambridge University Press, 2009
- [Qua24] QUANTZ, L.: *Wasserkraftmaschinen*, Springer, 1924
- [Ran04] RANNACHER, R.: *Incompressible Viscous Flows*, in: STEIN, E.; DE BORST, R.; HUGHES, T. J. (Hrsg.), *Encyclopedia of Computational Mechanics*, Bd. 3: Fluids, Kp. 6, 155–181, John Wiley & Sons, 2004
- [Red98] REDDY, B. D.: *Introductory Functional Analysis: With Applications to Boundary Value Problems and Finite Elements*, Springer, 1998
- [Red05] REDDY, J. N.: *An Introduction to Nonlinear Finite Element Analysis*, Oxford University Press, 2005
- [Red06] REDDY, J. N.: *An Introduction to the Finite Element Method*, McGraw-Hill, 2006
- [Red08] REDDY, J. N.: *An Introduction to Continuum Mechanics*, Cambridge University Press, 2008
- [Ree73] REED, W.; HILL, T.: *Triangular mesh methods for the neutron transport equation*, 1973
- [Rei16] REINSTÄDLER, S.: *Modellierung und numerische Analyse der Entleerung von dünnwandigen Silos*, Dissertation, Technische Universität Braunschweig, 2016
- [Rou61] ROUSE, H.: *Fluid Mechanics for Hydraulic Engineers*, Dover Publications, 1961

-
- [Sag04] SAGAUT, P.: *Turbulence Direct Numerical Simulation and Large-Eddy Simulation*, in: STEIN, E.; DE BORST, R.; HUGHES, T. (Hrsg.), *Encyclopedia of Computational Mechanics*, Bd. 3: Fluids, Kp. 9, John Wiley & Sons, 2004
 - [Sau11] SAUERLAND, H.; FRIES, T. P.: *The Extended Finite Element Method for Two-Phase and Free-Surface Flows: A Systematic Study*, Journal of Computational Physics, 2011, 230(9):3369–3390
 - [Sau13] SAUERLAND, H.: *An XFEM Based Sharp Interface Approach for Two-Phase and Free-Surface Flows*, Dissertation, RWTH Aachen, 2013
 - [Sch72] SCHMID, G.: *Die Methode der finiten Elemente als Sonderfall der Methode der gewichteten Residuen*, ZAMM, 1972, 52:461–469
 - [Sch83] SCHREIBER, R.; KELLER, H. B.: *Driven Cavity Flows by Efficient Numerical Techniques*, Journal of Computational Physics, 1983, 49(2):310–333
 - [Sch87] SCHIPPKE, H.-G.: *Zur Berechnung von Übertragungsmatrizen für Gelenkfaltwerks-Makroelemente*, Dissertation, Universität Hannover, 1987
 - [Sch02] SCHMID, P.; HENNIGSON, D. S.: *On the Stability of a Falling Liquid Curtain*, Journal of Fluid Mechanics, 2002, 463:163–171
 - [Sch06] SCHLICHTING, H.; GERSTEN, K.: *Grenzschicht-Theorie*, Springer, 2006
 - [Sch10] SCHIPPKE, H.-H.: *Modellbildung und numerische Sensitivitätsanalyse des Schwingungsverhaltens eines hinterlüfteten Überfallwehres*, Diplomarbeit, Technische Universität Braunschweig, 2010
 - [Sch12a] SCHIPPKE, H.-H.: *Investigation of a Sliding Mesh Scheme for Space-Time Finite Element Discretisations of Viscous Fluids*, Masterarbeit, Technische Universität Braunschweig, 2012
 - [Sch12b] SCHIPPKE, H.-H.; ZILIAN, A.: *Modification of the Shear-Slip Mesh Update Method with Respect to Space-Time Finite Element Discretisation of Fluid Flows*, in: ANDRADE-CAMPOS, A.; LOPES, N.; VALENTE, R. A. F.; VARUM, H. (Hrsg.), *First ECCOMAS Young Investigators Conference (YIC 2012)*, ECCOMAS, 2012
 - [Sch12c] SCHIPPKE, H.-H.; ZILIAN, A.: *Space-Time Shear-Slip Mesh Update Method for Fluid-Structure Interaction Problems*, in: *European Congress on Computational Methods in Applied Sciences and Engineering (ECCOMAS 2012)*, 2012 2574–2589
 - [Sch13] SCHIPPKE, H.-H.; SEIDEL, C.; ZILIAN, A.; DINKLER, D.: *Methodenentwicklung zur numerischen Strömungsanalyse von Schaufelwasserrädern*, PAMM, 2013, 13(1):223–224
 - [Sch14] SCHIPPKE, H.-H.; SEIDEL, C.; ZILIAN, A.: *Methodenentwicklung zur numerischen Strömungsanalyse von Freispiegelströmungen bei Schaufelwasserrädern*, PAMM, 2014, 14(1)
 - [Sch15] SCHLAUCH, E.: *Finite Element Simulations of Colloidal Aggregates in Stokes Flow*, Dissertation, RWTH Aachen, 2015

- [Sei07] SEIDEL, C.: *Deutsche Patenanmeldung DE 10 2006 003 099 A1*, 2007
- [Sei15] SEIDEL, C.: *Weiterentwickelte Wasserradtechnologie*, Techn. Bericht, Technische Universität Braunschweig, 2015
- [Sei16] SEIDEL, C.: *Forschungsantrag "Neuentwicklung Stahl-Hochleistungswasserradtechnologie, Forschungsprojekt 2"*, Techn. Bericht, Technische Universität Braunschweig, 2016
- [Set96] SETHIAN, J. A.: *A Fast Marching Level Set Method for Monotonically Advancing Fronts*, Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America, 1996, 93(4):1591–1595
- [Set99] SETHIAN, J. A.: *Level Set Methods and Fast Marching Methods*, Cambridge University Press, 1999
- [Set03] SETHIAN, J. A.; SMEREKA, P.: *Level Set Methods for Fluid Interfaces*, Annual Review of Fluid Mechanics, 2003, 35(1):341–372
- [Sha91] SHAKIB, F.; HUGHES, T. J. R.: *A New Finite Element Formulation for Computational Fluid Dynamics: IX. Fourier Analysis of Space-Time Galerkin/Least-Squares Algorithms*, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 1991, 87(1):35 – 58
- [Sha00] SHANKAR, P. N.; DESHPANDE, M. D.: *Fluid Mechanics in the Driven Cavity*, Annual Review of Fluid Mechanics, 2000, 32:93–136
- [She02] SHEWCHUK, J. R.: *What is a Good Linear Element? Interpolation, Conditioning, and Quality Measures*, 2002
- [Smo01] SMOLIANSKI, A.: *Numerical Modeling of Two-Fluid Interfacial Flows*, Dissertation, University of Jyväskylä, 2001
- [Son09] SONAR, T.: *Turbulenzen um die Fluidmechanik*, Spektrum der Wissenschaft, 2009, 78–87
- [Spu07] SPURK, J. H.; AKSEL, N.: *Strömungslehre*, Springer, 2007
- [Ste79] STEWART, H. B.: *Stability of Two-Phase Flow Calculation Using Two-Fluid Models*, Journal of Computational Physics, 1979, 33(2):259 – 270
- [Ste96] STEIN, E.; BARTHOLD, F.-J.: *Elastizitätstheorie*, in: MEHLHORN, G. (Hrsg.), *Der Ingenieurbau*, 165–428, Ernst & Sohn, 1996
- [Sti07] STIMPSON, C. J.; ERNST, C. D.; KNUPP, P. M.: *The Verdict Library Reference Manual*, 2007
- [Str06] STROBL, T.; ZUNIC, F.: *Wasserbau*, Springer, 2006
- [Str08] STRANG, G.; FIX, G.: *An Analysis of the Finite Element Method*, Wellesley-Cambridge Press, 2008

-
- [Sun10] SUN, P.: *Fluid-Struktur-Wechselwirkungen mit aktiver Schwingungskontrolle durch piezoelektrische Materialien*, Dissertation, Technische Universität Braunschweig, 2010
 - [Sus94] SUSSMAN, M.; SMEREKA, P.; OSHER, S.: *A Level Set Approach for Computing Solutions to Incompressible Two-Phase Flow*, Journal of Computational Physics, 1994, 114(1):146 – 159
 - [Sus00] SUSSMAN, M.; GERRY PUCKETT, E.: *A Coupled Level Set and Volume-of-Fluid Method for Computing 3D and Axisymmetric Incompressible Two-Phase Flows*, Journal of Computational Physics, 2000, 162(2):301 – 337
 - [SV14] SOKORAY-VARGA, B.; HÖGER, V.: *BAWEmpfehlung, Messungen mit dem Vectri-no*, Techn. Bericht, Bundesanstalt für Wasserbau, 2014
 - [Sza11] SZABÓ, B.; BABUSKA, I.: *Introduction to Finite Element Analysis*, Wiley, 2011
 - [Tez92a] TEZDUYAR, T. E.: *Stabilized Finite Element Formulations for Incompressible Flow Computations*, Advances in Applied Mechanics, 1992, 28:1–44
 - [Tez92b] TEZDUYAR, T. E.; BEHR, M.; LIOU, J.: *A New Strategy for Finite Element Computations Involving Moving Boundaries and Interfaces, The Deforming-Spatial-Domain/Space-Time Procedure: I. The Concept and the Preliminary Numerical Tests*, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 1992, 94(3):339–351
 - [Tez92c] TEZDUYAR, T. E.; BEHR, M.; MITTAL, S.; LIOU, J.: *A New Strategy for Finite Element Computations Involving Moving Boundaries and Interfaces, The Deforming-Spatial-Domain/Space-Time Procedure: II. Computation of Free-Surface Flows, Two-Liquid Flows and Flows with Drifting Cylinders*, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 1992, 94(3):353–371
 - [Tez92d] TEZDUYAR, T. E.; MITTAL, S.; RAY, S. E.; SHIH, R.: *Incompressible Flow Computations with Stabilized Bilinear and Linear Equal-Order-Interpolation Velocity-Pressure Elements*, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 1992, 95:221–242
 - [Tez00] TEZDUYAR, T. E.; OSAWA, Y.: *Finite Element Stabilization Parameters Computed from Element Matrices and Vectors*, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 2000, (190):411–430
 - [Tez01] TEZDUYAR, T. E.: *Adaptive Determination of the Finite Element Stabilization Parameters*, in: *ECCOMAS Computational Fluid Dynamic Conference*, 2001
 - [Tez03] TEZDUYAR, T. E.; SATHE, S.: *Stabilization Parameters in SUPG and PSPG*, Journal of Computational and Applied Mechanics, 2003, 4(1):71–88
 - [Tez06] TEZDUYAR, T. E.: *Interface-Tracking and Interface-Capturing Techniques for Finite Element Computation of Moving Boundaries and Interfaces*, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 2006, 195(23-24):2983–3000

- [Tru91] TRUESDELL, C. A.: *A First Course in Rational Continuum Mechanics*, Academic Press, 1991
- [Tru08] TRUCKENBRODT, E.: *Fluidmechanik Bd. 1*, Springer, 2008
- [Try01] TRYGGVASON, G.; BUNNER, B.; ESMAEELI, A.; JURIC, D.; AL-RAWAHI, N.; TAUBER, W.; HAN, J.; NAS, S.; JAN, Y.-J.: *A Front-Tracking Method for the Computations of Multiphase Flow*, Journal of Computational Physics, 2001, 169(2):708 – 759
- [Tur56] TURNER, C. R. W. M. H. C., M. J.; TOPP, L. J.: *Stiffness and Deflection Analysis of Complex Structures*, Journal of the Aeronautical Sciences, 1956, 23(9):805–823
- [Wal97] WALHORN, E.: *Untersuchung zur Theorie und Numerik lokaler residualer Fehler-schätzer für die adaptive Finite-Elemente-Methode*, Universität Hannover, 1997
- [Wal99] WALL, W. A.: *Fluid-Struktur-Interaktion mit stabilisierten Finiten Elementen*, Dissertation, Universität Stuttgart, 1999
- [Wal02] WALHORN, E.: *Ein simultanes Berechnungsverfahren für Fluid-Struktur-Wechselwirkungen mit finiten Raum-Zeit-Elementen*, Dissertation, Technische Universität Braunschweig, 2002
- [Wic71] WICKERT, G.; SCHMAUSSER, G.: *Stahlwasserbau*, Springer, 1971
- [Wil98] WILCOX, D. C.: *Turbulence Modeling for CFD*, DCW Industries, 1998
- [Win04] WINCKELMANS, G. S.: *Vortex Methods*, in: STEIN, E.; DE BORST, R.; HUGHES, T. (Hrsg.), *Encyclopedia of Computational Mechanics*, Bd. 3: Fluids, Kp. 5, John Wiley & Sons, 2004
- [Wör03] WÖRNER, M.: *A Compact Introduction to the Numerical Modeling of Multiphase Flows*, Techn. Bericht, Institut für Reaktorsicherheit, Forschungszentrum Karlsruhe, 2003
- [Wri08] WRIGGERS, P.: *Nonlinear Finite Element Methods*, Springer, 2008
- [Wri09] WRIGGERS, P.; CARSTENSEN, C. (Hrsg.): *Mixed Finite Element Technologies*, Springer, 2009
- [Zan13] ZANKE, U.: *Hydraulik für den Wasserbau*, Springer, 2013
- [Zha09] ZHANG, Z.: *Freistrahlturbinen*, Springer, 2009
- [Zie91] ZIEREP, J.: *Ähnlichkeitsgesetze und Modellregeln der Strömungslehre*, Springer, 1991
- [Zie13] ZIENKIEWICZ, O. C.; TAYLOR, R. L.; ZHU, J. Z.: *The Finite Element Method: Its Basis and Fundamentals*, Elsevier, 2013
- [Zie14a] ZIENKIEWICZ, O. C.; TAYLOR, R. L.: *The Finite Element Method for Solid and Structural Mechanics*, Elsevier, 2014

- [Zie14b] ZIENKIEWICZ, O. C.; TAYLOR, R. L.; NITHIARASU, P.: *The Finite Element Method for Fluid Dynamics*, Elsevier, 2014
- [Zil08] ZILIAN, A.: *Forschungsantrag "Entwicklung und Einsatz eines numerischen Modells zur systematischen Untersuchung wirkungsgradrelevanter hydraulischer Phänomene und Sensitivitäten bei Hochleistungswasserrädern"*, Techn. Bericht, Technische Universität Braunschweig, 2008

Berichte aus dem Institut für Statik ab 2003

- Nr. 2003-96 B. HÜBNER: Simultane Analyse von Bauwerk-Wind-Wechselwirkungen
- Nr. 2003-97 J. GEISTEFELDT: Stochastische Finite-Element-Methoden mit Anwendung auf aeroelastische Tragsysteme
- Nr. 2003-98 O. KNOKE: Beulwiderstände zusammengesetzter Zylinder-Kegel-Schalen
- Nr. 2005-99 A. KÖLKE: Modellierung und Diskretisierung bewegter Diskontinuitäten in randgekoppelten Mehrfeldsystemen
- Nr. 2006-100 D. DINKLER (HRSG.): Institut für Statik, Lehre und Forschung, 1996-2006
- Nr. 2006-101 A. VEHRE: Ein Reduktionsverfahren für Fluid-Struktur-Wechselwirkung mit Finiten Raum-Zeit-Elementen
- Nr. 2006-102 M. LÖHR: Analyse aeroelastischer Systeme mit Spektralen Stochastischen Finite-Element-Methoden
- Nr. 2006-103 L. ASCHENBRENNER: Mehrkomponenten-Modell zur Beschreibung des Deformationsverhaltens von Asphalt
- Nr. 2006-104 T. ZÜMENDORF: Ein gradientenabhängiges Modell für Schädigung bei viskoplastischem Materialverhalten
- Nr. 2007-105 C. LEPPERT: Mehrphasenmodell für granulare Medien zur numerischen Untersuchung des Phasenübergangs bei der Entleerung von Silos
- Nr. 2007-106 V. KRASE: Stability of Municipal Solid Waste Landfills
- Nr. 2007-107 J. PONTOW: Imperfektionsempfindlichkeit und Grenzlaster von Schalentragerwerken
- Nr. 2009-108 M. BECKMANN: Ein gradientenabhängiges Modell für anisotrope Schädigung von Beton unter Berücksichtigung von Porendruck
- Nr. 2010-109 P. SUN: Fluid-Struktur-Wechselwirkung mit aktiver Schwingungskontrolle durch piezoelektrische Materialien
- Nr. 2010-110 J. VELDE: 3D Nonlocal Damage Modeling for Steel Structures under Earthquake Loading
- Nr. 2010-111 K. SCHUSTER: Systemidentifikation und Bauwerksüberwachung mit piezokeramischen Aktuatoren
- Nr. 2011-112 S. BENTE: Interaction of Degradation, Deformation and Transport Processes in Municipal Solid Waste Landfills
- Nr. 2011-113 L. OSTERMANN: Hochtemperaturverhalten von Beton – Gekoppelte Mehrfeld-Modellierung und numerische Analyse
- Nr. 2012-114 B. BRODERSEN: Modellierung des thermo-mechanischen Verbundverhaltens von Asphalt in Straßenaufbauten
- Nr. 2012-115 J. KINDLEIN: Gekoppelte Analyse von Reaktions- und Transportprozessen in Deponiestrukturen

- Nr. 2015-116 F. PASENOW: Modellierung oberflächengekoppelter Mehrfeldsysteme und numerische Analyse rutschender Bodenmaterialien
- Nr. 2015-117 M. SCHAUER: Ein effizienter gekoppelter FEM-SBFEM Ansatz zur Analyse von Boden-Bauwerk-Interaktionen im Zeitbereich
- Nr. 2016-118 A. ALFARRA: Numerische Analyse von Bauwerk-Wind-Wechselwirkungen mit RANS-Turbulenzmodellen
- Nr. 2016-119 S. REINSTÄDLER: Modellierung und numerische Analyse der Entleerung von dünnwandigen Silos
- Nr. 2016-120 F. CRAMER: Mehrfeld-Modell für chemisch-physikalische Alterungsprozesse von Beton
- Nr. 2018-121 T. BLUME: Mikromechanisch begründete Modellbildung des thermo-mechanischen Werkstoffverhaltens von Asphalt
- Nr. 2018-122 F. OCKELMANN: Modellierung und numerische Analyse von Beton und faserverstärktem Ultrahochleistungsbeton mit der Diskrete Elemente Methode
- Nr. 2019-123 A. GAFOOR: Modeling and numerical analysis of damage behavior of concrete
- Nr. 2019-124 H.-H. HERMERSCHMIDT: Entwicklung eines Berechnungsmodells zur Untersuchung der Strömungsvorgänge an Überfallschütz und drehendem Schaufelwasserrad

Sonderdrucke

Phänomenologische Modelle für Werkstoffe des Bauwesens.

Hermann Ahrens zum 60. Geburtstag (1998).

Herausgeber: D. Dinkler, U. Kowalsky.

Baustatik-Baupraxis 8.

Berichte der Fachtagung am 21. und 22. März 2002 in Braunschweig.

Herausgeber: D. Dinkler.

Institut für Statik, Technische Universität Braunschweig

Beethovenstraße 51, 38106 Braunschweig, Deutschland

Telefon +49 (0)531 / 391-3667, Telefax +49 (0)531 / 391-8116

E-Mail statik@tu-bs.de, Homepage <https://www.tu-braunschweig.de/statik>